

Die Lyman α Strahlung der Wasserstoffatmosphären
von Kometen

Ein Modell mit Mehrfachstreuung

Horst Uwe Keller

München

1971

Die Lyman α Strahlung der Wasserstoffatmosphären von Kometen
Ein Modell mit Mehrfachstreuung

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung der Doktorwürde
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von
Horst Uwe Keller
am 20.10.1971



1. Referent: Prof. Dr. L. Biermann

2. Referent: Prof. Dr. P. Wellmann

Tag der mündlichen Prüfung: 17.12.1971

Inhaltsverzeichnis

I.	Einführung	1
II.	Modell einer Kometenwasserstoffatmosphäre	6
	1.) Das kinematische Modell	6
	2.) Der Absorptionskoeffizient	7
	3.) Die Streufunktion	14
	4.) Die optische Tiefe	14
	5.) Die Modelleigenschaften	17
III.	Analytische Behandlung für Einfachstreuung	19
	1.) Die Gesamtintensität	19
	2.) Das Linienprofil	22
IV.	Die Monte-Carlo-Methode	24
	1.) Überblick	24
	2.) Beschreibung der einzelnen Schritte im Monte-Carlo-Verfahren	25
	3.) Der Zufallszahlengenerator	37
V.	Ergebnisse und Vergleich mit den Messungen	38
	1.) Modellparameter der Monte-Carlo-Rechnung	38
	2.) Interpretation der Monte-Carlo-Rechnung	40
	3.) Vergleich mit den Messungen von Code	47
	4.) Die Gesamtausdehnung der Wasserstoffwolke	57
	5.) Anwendung der Rechnungen auf Metaldampf Wolken	58
VI.	Zusammenfassung	59
	Abbildungen	60
	Flußdiagramm	70
	Literatur	71
	Danksagung	73

I. Einführung

Anfang 1970 gelang es zum ersten Male, die riesigen Wasserstoffatmosphären von Kometen im Licht der Lyman α Linie (1216 Å) zu beobachten bzw. zu registrieren. Code und Lillie (1970) beobachteten die beiden hellen Kometen 1969g (Tago-Sato-Kosaka) und 1969i (Bennett) mit dem OA02 (Orbiting Astronomical Observatory). Sie erreichten eine Auflösung von einer Bogenminute. Komet Bennett wurde darüber hinaus von Bertaux und Blamont (1970) mit dem exzentrisch fliegenden Satelliten OG05 (Orbiting Geophysical Observatory) mit einer Auflösung von 40 Bogenminuten aber höherer Empfindlichkeit registriert.

Die Existenz der kometaren Wasserstoffatmosphären mit Durchmessern bis weit über 10 Mill km (bis zu 20 Sonnenradien) war schon Ende 1967 von Biermann (1968) in der gemessenen Größenordnung vorausgesagt worden. Zum Vergleich zeigen wir in Abbildung 1 eine Photomontage des sichtbaren Kometenbildes in die von Bertaux und Blamont (1970) am 1.4.70 gemessenen Isophoten des Kometen Bennett.⁺)

Die für diese ausgedehnten Wolken notwendigen Produktionsraten der Wasserstoffatome von mehr als 10^{29} H-Atomen/sec wären noch vor wenigen Jahren für unrealistisch gehalten worden. Noch Anfang des letzten Jahrzehnts wurde mit Produktionsraten von 10^{28} Molekülen sec^{-1} gerechnet, wenn auch bekannt war, daß viele Moleküle, deren Anwesenheit plausibel war, von der Erde aus nicht beobachtbar sind.

⁺) Inzwischen haben sich die Konturen der Isophoten auf Grund neuerer Reduktionen geändert (Blamont private Mitteilung). Die Gesamtausdehnung der Wasserstoffwolke blieb praktisch unverändert.

Eine Änderung trat ein, nachdem zunächst beim Kometen Mrkos (1957d) von Swings und Greenstein (1958) und später in vielen Kometenspektren von Swings (1962) und Remy-Battiau (1962) neben der verbotenen OI Linie ($6300 \text{ \AA}$) des Nachthimmelleuchtens auch eine solche vom Kometen selbst stammende nachgewiesen werden konnte.

Die Entstehung der angeregten Sauerstoffatome wurde auf die Dissoziation von H_2O oder CO_2 zurückgeführt, da auch OH und CO^+ beobachtet wurde. Aus der Linienstärke und der Lebensdauer der Sauerstoffatome gegen Ionisation konnten Biermann und Trefftz (1964) Produktionsraten von mehr als 10^{30} Atomen sec^{-1} ableiten.

Da die Kometen wahrscheinlich aus dem solaren Urnebel entstanden sind und auch aus der kosmischen Elementhäufigkeitsverteilung ein Überwiegen sauerstoffreicher Moleküle gegenüber solchen mit Wasserstoff nicht angenommen werden kann, liegt der Schluß nahe, ebenso große Produktionsraten für atomaren Wasserstoff anzunehmen. Die Entstehung der Wasserstoffatome wird durch die Photodissoziation von Molekülen erklärt, die entsprechend dem Whippleschen Eismodell (Whipple 1950, 1951, 1955) aus dem festen Kometenkern von einigen Kilometern Radius (Roemer 1966) verdampfen.

Auf gänzlich anderem Weg wurden die hohen Produktionsraten von Huebner (1965) durch Untersuchungen des Wärmehaushaltes und der Verdampfung des Kometenkernes sowie von Malaise (1970) durch die Druckeffekte in kometaren Molekülspektren bestätigt. Finson und Probst (1968) fanden durch gasdynamische Untersuchungen eine Produktionsrate von $1,5 \cdot 10^{30}$ Moleküle sec^{-1} für den Kometen Arend-Roland.

Zur weiteren Einführung in die Beobachtungen und ihre Interpretation (vor allem der letzten 10 Jahre) möchten wir auf den Artikel von Biermann (1971) verweisen.

Die verdampften Moleküle bestehen vorzugsweise aus den Verbindungen von Kohlenstoff, Sauerstoff, Stickstoff und Wasserstoff, von denen mehrere im sichtbaren Licht emittieren (wie z.B. C_2 , CN, CO^+ , OH), doch sind wahrscheinlich viele stabile Moleküle wie oben erwähnt vom Erdboden nicht zu beobachten.

Die Lebensdauer der Moleküle gegenüber Photodissoziation durch das Sonnenlicht ist unterschiedlich; sie liegt etwa zwischen 1 und 100 Stunden (Biermann und Treffitz 1964, Potter und Del Duca 1964). Alle Angaben beziehen sich auf die Entfernung Sonne-Komet von 1 A.E. Die mittlere Geschwindigkeit der neutralen Moleküle nach dem Verdampfen beträgt 0,5 bis 1 km/sec (Malaise 1970, Huebner und Weigert 1966). Sie kann bei der Betrachtung der Wasserstoffatome außer acht gelassen werden, da deren Geschwindigkeit nach der Abdissoziation von den Muttermolekülen wegen der hohen Überschußenergie zunächst zwischen 10 und 20 km/sec liegen dürfte (Keller 1971). Ein Großteil dieser schnellen Wasserstoffatome wird in der dichten Umgebung des Kometenkerns durch Zusammenstöße mit den schweren Teilchen abgekühlt. Erst bei Kernabständen von mehreren 10^5 km ist die freie Weglänge der H-Atome größer als ihr Kernabstand, so daß die relativ wenigen weiter draußen entstandenen H-Atome kaum noch gebremst werden.

Allerdings ist die Anzahl der Stöße, die die H-Atome mit den schweren Teilchen machen müssen, bis sie ihre Energie derjenigen der Moleküle angeglichen haben, so groß, daß in kernnahen Gebieten immer noch genügend schnelle H-Atome vorhanden sind, um zur Absorption der solaren Ly- α Linie wesentlich beizutragen (Keller 1971). Die Messungen durch Code und Mitarbeiter, die mit der hohen Auflösung von 1 Bogenminute arbeiteten, zeigen Zentralintensitäten von rund 1/10 der solaren Linie am Ort des Kometen.

In Gebieten der Wasserstoffatmosphäre, in denen keine H-Atome erzeugt oder vernichtet werden, nimmt ihre Dichte mit $1/r^2$ ab, falls die Änderung ihrer Ausströmgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann (Flußkonstanz). Das Dichteintegral längs der Sichtlinie durch dieses Gebiet ist dann proportional $1/d$ (d = Abstand des Zentrums von der Sichtlinie). Außen wird die Wasserstoffwolke durch die Ionisation der Wasserstoffatome abgebaut. Die Ionisationsmechanismen sind Umladung durch den Sonnenwind und zum kleineren Teil Photoionisation. Die Lebensdauer t_H der Wasserstoffatome beträgt rund 1 bis $2 \cdot 10^6$ sec (Biermann 1968, Keller 1971). Damit erreichen die Atome Entfernungen von mehreren 10^7 km. In der Abbildung 1 fallen die äußersten Isophoten wahrscheinlich mit der Ionisationsgrenze zusammen, wobei zu bemerken ist, daß der Himmelshintergrund selbst eine Strahlung von 200 Rayleigh aufweist.

Die starken Abweichungen der Isophoten von Kreisen entstehen in den äußeren Gebieten infolge der Strahlungsbeschleunigung der H-Atome durch die solaren Ly- α Quanten. Die Beschleunigung liegt

etwa bei $0,5 \text{ cm sec}^{-2}$ bei einem solaren Fluß in Ly- α von rund $3 \cdot 10^{11} \text{ Photonen cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$ (Hinteregger 1965, Hall und Hinteregger 1970). Innerhalb der Lebensdauer der H-Atome wird hierdurch eine Geschwindigkeit erzielt, die ein wesentlicher Bruchteil der ungestörten Ausströmgeschwindigkeit ist.

Zum Zentrum hin ist für das Abweichen der Intensität von der Proportionalität zu $1/d$ im wesentlichen die Zunahme der optischen Tiefe verantwortlich, wenn auch hier die Dichte nur noch mit $1/r$ zunimmt, da in diesem Gebiet noch Wasserstoffatome produziert werden (Biermann 1968). Die Irregularität der von Code und Mitarbeitern gemessenen Isophoten (Abb. 2) legt nahe, daß außer den hier genannten in verschiedenen Gebieten sich überlagernden Effekten wahrscheinlich noch Abweichungen von der zeitlichen Konstanz der Wasserstoffproduktionsrate und weitere Anisotropien eine Rolle spielen, die die Symmetrie zum Radius Sonne-Komet stören.

Die Auswirkungen der optischen Tiefe auf den Verlauf der Isophoten in der Nähe des Zentrums soll hier untersucht werden. Gleichzeitig soll eine Methode beschrieben werden, die es erlaubt, in sehr variabler Weise ohne zusätzlichen Aufwand die experimentellen Umstände (Geometrie und Auflösung) zu berücksichtigen. Die physikalischen Vorgänge bei der Absorption und Emission werden in einem stochastischen Prozeß - der Monte-Carlo-Rechnung - simuliert. Durch Anpassung an Messungen von Code (private Mitteilung) des Kometen Bennett (1969i) wird die Quellstärke und die mittlere Ausströmungsgeschwindigkeit der Wasserstoffatmosphäre bestimmt.

II. Modell einer Kometenwasserstoffatmosphäre

1.) Das kinematische Modell

Die Komplexität und Vielfalt der Parameter, die die Absorption und Emission eines Lichtquanten beschreiben, zwingen zu einer einfachen Darstellung der kinematischen Größen der absorbierenden H-Atome, damit spätere Integrale noch zumindest in einfachen Näherungen gelöst werden können.

Daher werden die aus der Dissoziation der den Kern umgebenden Muttermoleküle entstandenen H-Atome so behandelt, als kämen sie direkt aus dem Kern. Es gibt keine einfache Beschreibung des Dichteverlaufs für ausgedehnte Quellen. Aus den gleichen Gründen muß auch auf die Berücksichtigung der Strahlungsbeschleunigung verzichtet werden, da sonst die sehr vereinfachende radiale Symmetrie verloren geht. Die Auswirkungen dieser Vereinfachungen auf den Gültigkeitsbereich des Modells werden später (V.3) diskutiert.

Wir benutzen für die Dichte der H-Atome das Punktquellenmodell; es gilt

$$n_H = \frac{Q_W}{V_H r^2}$$

$$Q_W = \frac{Q}{4\pi} \text{ mit } Q = \text{Produktionsrate H-Atom/sec}$$

$$V_H = \text{mittlere makroskopische Ausströmgeschwindigkeit}$$

$$r = \text{Kernabstand}$$

Die einzelnen H-Atome haben verschiedene radiale mikroskopische Geschwindigkeiten, die wir mit der Verteilungsfunktion

$$f(v) dv = \frac{2}{v_0^2} v e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} dv, \quad v \geq 0$$

beschreiben.

Es kommen nur positive Geschwindigkeiten vor. $f(v)$ ist normiert

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1$$

Für die Dichte der H-Atome bei r mit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$ gilt

$$d n_H(v, r) = \frac{Q_H}{V_H r^2} 2 \frac{v}{v_0^2} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} dv$$

Die gewählte Geschwindigkeitsverteilung $f(v)$ kommt einer radialen Maxwellverteilung $\frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_0^3} e^{-\frac{v^2}{v_0^2}} dv$, die man in der wechselwirkungsfreien Umgebung einer thermalisierten Quelle mit infinitesimal kleinem Radius erwarten würde, nahe.

Die Berücksichtigung der Maxwellverteilung hätte die Lösung sehr stark kompliziert, da dann das wichtige Integral für die optische Tiefe nicht mehr geschlossen darzustellen wäre (vergl. II.4 bzw. IV.2).

2.) Der Absorptionskoeffizient

Die Dichte der Wasserstoffatome und Muttermoleküle ist so klein, daß Stöße während der Anregungszeit eines Atoms sehr unwahrscheinlich sind. Die Anregungszeit t_A des zweiten Niveaus ist gleich der reziproken Dämpfungskonstanten α (Unsöld 1955)

$$t_A = 1/\alpha = 2 \cdot 10^{-9} \text{ sec}$$

Die Zeit zwischen zwei Stößen ist

$$t_s = \frac{1}{v_H \cdot n_M \cdot q} ,$$

hierbei ist n_M die Dichte der Moleküle.

Für den Stoßquerschnitt q von Wasserstoffatomen mit typischen Molekülen wie CH_4 , C_2H_2 , C_2H_6 können wir den Wert $q = 3 \cdot 10^{-15} \text{ cm}^2$ (Toennies 1970) annehmen. Für die Produktionsrate Q_M der Moleküle setzen wir $Q_M = 10^{30} \text{ Moleküle sec}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$, für ihre Geschwindigkeit $v_M = 1 \text{ km sec}^{-1}$ und erhalten damit für $v_H = 10 \text{ km sec}^{-1}$

$$t_s = \frac{v_M \cdot r^2}{Q_M \cdot q \cdot v_H} = \frac{r^2 (\text{in km})}{3 \cdot 10^6} \text{ sec}$$

Da die Kometenkernradien eine Größe von einigen Kilometern haben (Roemer 1966), ist $t_s \geq 10^{-6} \text{ sec}$.

Die Strahlung der Sonne ist wegen der großen Entfernung stark verdünnt. Bei 1 A.E. Kometenabstand wird ein H-Atom nur etwa alle 10^{+3} sec durch die Ly- α Linie angeregt (Biermann 1968).

Da die energiereichere Strahlung der Sonne noch wesentlich schwächer ist und die Oszillatorstärken für die Übergänge der übrigen Lyman Linien noch geringer als bei Ly- α sind, können trotz der bis um den Faktor 10 längeren Lebensdauer der oberen Niveaus diese nur bei einem verschwindenden Teil der Atome angeregt sein.

Alle H-Atome befinden sich also im Grundzustand, und wir brauchen nur die Resonanzlinie in unserer Strahlungsbilanz zu berücksichtigen.

Das Grundniveau ist nicht verbreitert. Für die Verbreiterung der Absorptionslinie spielt nur die Dämpfung α des 2. Niveaus eine Rolle.

Die Absorption eines jeden Atoms im atomaren Koordinatensystem wird daher durch das Lorentzprofil beschrieben (Hummer 1962)

$$W(\mu) d\mu = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1}{(\mu - \nu_0)^2 + \alpha^2} d\mu \quad \text{mit} \quad \int_{-\infty}^{\infty} W(\mu) d\mu = 1$$

μ = Frequenz im atomaren System; ν_0 = Frequenz der Linienmitte im atomaren System, $\nu_0 = 2,46 \cdot 10^{15} \text{ sec}^{-1}$.

Um die Absorption eines Photons mit der Frequenz ν im raumfesten Koordinatensystem anzugeben, muß der Dopplereffekt für die entsprechend der Geschwindigkeitsverteilung $f(v)dv$ fliegenden Atome berücksichtigt werden.

In erster Ordnung in $\frac{v}{c}$ gilt (c = Lichtgeschwindigkeit)

$$\nu = \mu + \mu \frac{v}{c} \cos \varphi,$$

wobei φ der Winkel zwischen der Flugrichtung des Lichtquants und des absorbierenden Wasserstoffatoms ist. Er ändert sich beim Übergang von einem zum anderen Koordinatensystem in gleicher Näherung nicht. Weil $|\mu - \nu_0| \ll \nu_0$, können wir in der folgenden Gleichung auf der rechten Seite μ durch ν_0 ersetzen und erhalten

$$\mu = \nu - \nu_0 \frac{v}{c} \cos \varphi$$

Zusammenfassend ergibt sich für den atomaren Absorptionskoeffizienten $k_\nu(\nu, \varphi)$ [cm²] das Faltungsintegral

$$k_\nu(\nu, \varphi) = \kappa'_0 \int_0^\infty f(\nu') w(\nu - \nu_0 \frac{\nu}{c} \cos \varphi) d\nu'$$

Zur Bestimmung der konstanten κ'_0 s.u.

$$k_\nu(\nu, \varphi) = \kappa'_0 \int_0^\infty 2 \frac{\nu'}{\nu_0^2} e^{-\left(\frac{\nu'}{\nu_0}\right)^2} \frac{\alpha}{\pi} \frac{d\nu'}{(\nu - \nu_0 - \nu_0 \frac{\nu'}{c} \cos \varphi)^2 + \alpha^2}$$

Die Normierungsgeschwindigkeit ν_0 der Verteilungsfunktion $f(\nu)$ ist ein freier Parameter des zugrunde liegenden Modells. Sie wird später (V.3) zu rund 10 km sec⁻¹ durch Anpassung der Zentralintensität der Wasserstoffatmosphäre an die Messungen bestimmt werden und ist ein Maß für die Größe der Ausströmgeschwindigkeit der Wasserstoffatome. Mit Hilfe von ν_0 führen wir die dimensionslose Variable $\eta = \frac{\nu}{\nu_0}$ ein.

$$k_\nu(\nu, \varphi) = \kappa'_0 \int_0^\infty 2 \eta e^{-\eta^2} \frac{1}{\Delta \nu_D} \frac{\alpha / \Delta \nu_D}{\pi} \frac{d\eta}{\left(\frac{\Delta \nu}{\Delta \nu_D} - \eta \cos \varphi\right)^2 + \frac{\alpha^2}{\Delta \nu_D^2}}$$

dabei sind $\Delta \nu_D = \frac{\nu_0}{c} \nu_0$ und $\Delta \nu = \nu - \nu_0$.

Wie die Dämpfung α ein Maß für die natürliche Linienbreite ist, so ist es die "Dopplerbreite" $\Delta \nu_D$ für die Verbreiterung des Linienprofils durch die Geschwindigkeitsverteilung. Bei den oben angegebenen Werten ergibt sich

$$\frac{\alpha}{\Delta \nu_D} < 10^{-2}$$

Wegen der Exponentialfunktion in der Geschwindigkeitsverteilung ist der Abfall des Dopplerprofils bei größeren Abständen der Frequenz von der Linienmitte größer als derjenige des Dämpfungsprofils. Eine Abschätzung für die Grenzfrequenz, wo das Dämpfungs- und Dopplerprofil sich schneiden, wird weiter unten gebracht.

Da die optische Tiefe, wie wir noch zeigen werden, nur in Kernnähe große Werte erreicht, werden die Linienflügel der Emissionslinie nicht sehr ausgeprägt sein. Wir vernachlässigen die natürliche Linienbreite und ersetzen das Lorentzprofil für $\frac{\alpha}{\Delta\nu_0} \rightarrow 0$ durch die δ -Funktion

$$k_\nu(\nu, \varphi) = \alpha_0 \int_0^\infty f_2(\eta) \delta\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_0} - \eta \cos \varphi\right) d\eta$$

$$\begin{aligned} \text{mit } f_2(\eta) &= 2\eta e^{-\eta^2} \quad \text{für } \eta > 0 \\ &= 0 \quad \text{für } \eta \leq 0 \\ \text{und } \alpha_0 &= \alpha_0' \cdot \frac{1}{\Delta\nu_0} \end{aligned}$$

Der Absorptionsquerschnitt $\alpha_0 [\text{cm}^2]$ wird durch die Gesamtabsorption $A_\nu = \frac{\pi e^2}{mc} f$ bestimmt; denn es gilt (Oxenius 1965) für anisotrope Absorptionskoeffizienten

$$4\pi A_\nu = \int \int_{-\infty}^{+\infty} k_\nu(\nu, \Omega) d\nu d\Omega$$

e = Ladung des Elektrons
 m = Masse des Elektrons
 c = Lichtgeschwindigkeit
 f = 0,416 Oszillatorenstärke
 Ω = Raumwinkel

Bei der Integration ist zu beachten, daß der Integrand nur Beiträge liefert solange $\Delta\nu$ und $\cos \varphi$ das gleiche Vorzeichen haben, da $f_2(\eta)$ für negative Argumente verschwindet.

Wir finden

$$\alpha_0 = \frac{\pi e^2}{m c} f \frac{1}{\Delta \nu_D}$$

Damit ergibt sich für den atomaren Absorptionskoeffizienten in Abhängigkeit von dem dimensionslosen Frequenzmaß $\xi = \frac{\Delta \nu}{\Delta \nu_D}$

$$k(\xi, \varphi) = \alpha_0 \frac{f_2(\xi/\cos \varphi)}{\cos \varphi}$$

oder für den Absorptionskoeffizienten pro Weglänge

$$\alpha(\xi, \varphi) = \alpha_0 \frac{Q_W}{V_W r^2} \frac{f_2(\xi/\cos \varphi)}{\cos \varphi}$$

Positive und negative Frequenzen ξ werden also nur jeweils in einem Halbraum absorbiert. Die beiden Hälften sind durch die vom Radiusvektor definierte Ebene am Absorptionspunkt getrennt.

Wir berechnen jetzt das Integral des Absorptionskoeffizienten über alle Raumwinkel. Der so gemittelte Absorptionskoeffizient wird dem Profil der Emissions- bzw. Absorptionslinie der gesamten Wasserstoffwolke ähnlich sein, weil hierzu ja alle Winkel φ beitragen.

$$\bar{k}(\xi) = \frac{1}{4\pi} \int k(\xi, \varphi) d\Omega$$

$$\bar{k}(\xi) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \alpha_0 2\pi \int_0^1 \frac{f_2(\xi/\cos \varphi)}{\cos \varphi} d \cos \varphi & \text{falls } \xi \geq 0 \\ \frac{1}{4\pi} \alpha_0 2\pi \int_{-1}^0 \frac{f_2(\xi/\cos \varphi)}{\cos \varphi} d \cos \varphi & \text{falls } \xi < 0 \end{cases}$$

Nach Einsetzen von $f_2(x)$ erhalten wir

$$\bar{k}(\xi) = x_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \phi_c(|\xi|)$$

mit $\phi_c(x)$ der komplementären Fehlerfunktion

$$\phi_c(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt$$

Eine entsprechende Rechnung für die radiale Maxwellverteilung führt auf das bekannte Dopplerprofil

$$\bar{k}_M(\xi) = x_0 \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$$

Ein Vergleich der beiden Profile (in Abb.3) zeigt, daß die Absorption bei der Modellverteilung in der Linienmitte um den Faktor $\frac{\pi}{2}$ größer als bei dem gewöhnlichen Dopplerprofil ist. Dafür sind die Linienflügel stärker herabgedrückt. Bei $\xi = 0,48$ sind beide Profile gleich groß. Der innere Teil der Modelllinie ähnelt einem gleichschenkligen Dreieck. Insgesamt ist der Verlauf der beiden Absorptionsprofile doch so ähnlich, daß große Rückwirkungen auf die Isophoten nicht zu erwarten sind.

Vergleicht man das Linienprofil $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \phi_c(\xi)$ mit dem asymptotischen Verhalten des Lorentzprofils $w(\xi)$ für $\xi > 1$: $w_g(\xi) \sim \frac{\alpha}{4\nu_0 \pi} \cdot \frac{1}{\xi^2}$, so sieht man, daß für $\frac{\alpha}{4\nu_0} = 6 \cdot 10^{-3}$ (entsprechend $v_0 \approx 10$ km/sec)

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \phi_c(\xi) < w_g(\xi) \text{ für } \xi > 2,8 \text{ wird.}$$

Das heißt, erst in größeren Frequenzabständen von der Linienmitte als der dreifachen Dopplerbreite spielt das Dämpfungsprofil eine Rolle.

3.) Die Streufunktion

Die Streuung eines Lichtquants an einem ungestört fliegenden Atom ist unabhängig von dessen Richtung. Bei der hier geltenden Dipolstreuung ist die Emissionsrichtung $\mathbf{n}'$ nur von dem Winkel zwischen der Einfallsrichtung $\mathbf{n}$ und $\mathbf{n}'$ abhängig. Es gilt (Hummer 1962)

$$g(\mathbf{n}, \mathbf{n}') d\Omega = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2 \beta) d\cos\beta d\varphi$$

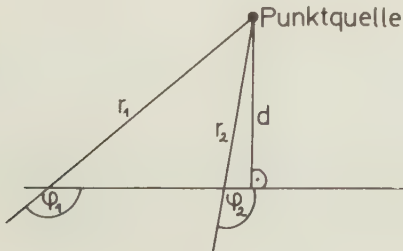
mit $\beta = \angle(\mathbf{n}, \mathbf{n}')$ und φ Azimut um $\mathbf{n}$.

Diese Streufunktion g unterscheidet sich besonders in ihren Extrema deutlich von der isotropen

$$g'(\mathbf{n}, \mathbf{n}') d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi}$$

4.) Die optische Tiefe

Die Dichteverteilung der H-Atome um die Punktquelle ist kugelsymmetrisch. Daher kann man den Weg l eines Photons durch die Winkeländerung φ und seinen minimalen Abstand zum Zentrum, den Stoßparameter d , beschreiben.



$$r = \frac{d}{\sin \varphi}, \quad l = \frac{d}{\sin^2 \varphi}, \quad dl = -d \frac{d(\cos \varphi)}{\sin^3 \varphi}$$

Zur Beschreibung der Flugbahn eines Photons wird die dimensionslose Größe $\tau = \int x dl$ eingeführt.

$$\begin{aligned} d\tau &= x(\xi, \varphi) dl = x_0 \frac{Q_W}{V_H \cdot \pi^2} f_2(\xi/\cos\varphi) \frac{d\xi}{\cos\varphi} \\ &= -x_0 \frac{Q_W}{V_H} \cdot \frac{1}{d} \frac{f_2(\xi/\cos\varphi)}{\cos\varphi} \frac{d(\cos\varphi)}{\sin\varphi} \end{aligned}$$

Zur Abkürzung setzen wir $D_0 = x_0 \cdot \frac{Q_W}{V_H} \cdot \sqrt{\pi}$ und führen als dimensionslose Größe $D = \frac{d}{D_0}$ ein. Für die später (vergl. V.3) gefundenen Parameterwerte ist $D_0 \approx 10^6$ km.

$$\tau(\xi) = - \frac{1}{D \cdot \sqrt{\pi}} \int_{\cos\varphi_1}^{\cos\varphi_2} \frac{f_2(\xi/\cos\varphi)}{\cos\varphi} \frac{d(\cos\varphi)}{\sin\varphi}$$

Wir können das Integral auf die Fehlerfunktion $\phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ zurückführen.

$$\begin{aligned} \tau(\xi) = \mp \frac{1}{D} e^{-\xi^2} (\phi(\xi \operatorname{tg} \varphi_2) - \phi(\xi \operatorname{tg} \varphi_1)) & \quad \text{für } \xi > 0 \\ & \quad \text{und } \xi \cdot \operatorname{tg} \varphi > 0 \\ & \quad + \text{für } \xi < 0 \end{aligned}$$

Der Integralbeitrag für $\xi \operatorname{tg} \varphi < 0$ verschwindet. Daher wird die Integration nur bis $\frac{\pi}{2}$ ($\xi < 0$) oder von $\frac{\pi}{2}$ ($\xi > 0$) durchgeführt.

Wird die Kometenwolke als unendlich ausgedehnt gedacht, so ergibt sich für die tangentielle optische Tiefe τ im Abstand D

$$(\xi < 0: \varphi_1 = \pi, \varphi_2 = \frac{\pi}{2}; \xi > 0: \varphi_1 = \frac{\pi}{2}, \varphi_2 = 0)$$

$$\tau(\xi) = \frac{e^{-\xi^2}}{D}$$

Für $D = 1$ ergibt sich für die Linienmitte $\xi = 0$

$$\tau(0) = 1$$

Allgemein:

$$\tau(\xi, 0, \varphi) = \frac{e^{-\xi^2}}{D} \phi(\xi \tan \varphi) \quad \xi < 0$$

und $\xi \cdot \tan \varphi > 0$

$$\tau(\xi, 0, \varphi) = \frac{e^{-\xi^2}}{D} \phi_c(\xi \tan \varphi) \quad \xi > 0$$

$$\phi_c(x) = 1 - \phi(x)$$

Für radialen Einfall des Photons ($D = 0$) gilt $dl = -dr$ und für

$$\tau(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \xi e^{-\xi^2} \frac{1}{s}, \quad s = \frac{r}{D_0}$$

Das Maximum der optischen Tiefe liegt dann bei $\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

$\tau = 1$ wird bei $s \sim 0,2$ erreicht.

Die tangentielle optische Tiefe $\tau(\xi, \varphi)$ ist in dem Punkt $\tau(0, \frac{\pi}{2})$ nicht stetig und auch nicht analytisch fortsetzbar. Es gilt nämlich

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \tau(\xi, \frac{\pi}{2}) = \frac{1}{D} \quad \text{aber} \quad \lim_{\xi \rightarrow 0} \tau(\xi, \varphi) = 0 \quad \text{für} \quad \varphi \neq \frac{\pi}{2}$$

Die Frequenz $\xi = 0$ kann nur unter dem Winkel $\varphi = \frac{\pi}{2}$ absorbiert werden. Die vollständige Trennung der Absorptionsgebiete für

$\xi > 0$ bzw. $\xi < 0$, die sich gegenseitig nicht abschatten, ist die wichtigste Konsequenz aus der rein radialen Geschwindigkeitsverteilung.

5.) Die Modelleigenschaften

In diesem Abschnitt fassen wir nochmals alle Punkte zusammen, die bei der Berechnung der Isophoten der Wasserstoffwolke eine Rolle spielen.

A) Das Modell berücksichtigt:

- eine Dichteverteilung $\propto \frac{1}{r^2}$ der H-Atome in Gebieten der Wolke, in denen weder Atome neu produziert noch vernichtet werden (konstanter Fluß).
- eine Geschwindigkeitsverteilung, die der zu erwartenden radialen Maxwellverteilung nahe kommt.
- die exakte Frequenzabhängigkeit des Absorptions- bzw. Emissionskoeffizienten.
- die Richtungsabhängigkeit des Absorptionskoeffizienten, hervorgerufen durch die anisotrope Geschwindigkeitsverteilung.
- die Richtungsverteilung der Dipolstrahlung bei jedem einzelnen Streuvorgang.

Die Monte-Carlo-Rechnung kann leicht auf alle geometrischen Verhältnisse Sonne-Komet-Erde und in gewissen Grenzen auf die Auflösung der Helligkeitsmessung abgestimmt werden.

B) Aufgeführt in der Reihenfolge der Bedeutung vernachlässigt bzw. berücksichtigt das Modell nicht:

- die Entstehung von H-Atomen in ausgedehnten Gebieten und damit eine Abweichung der Dichteabhängigkeit von $n_H \propto 1/r^2$ zu $n_H \propto 1/r$, sowie die Abweichung von der rein radialen Geschwindigkeitsverteilung.

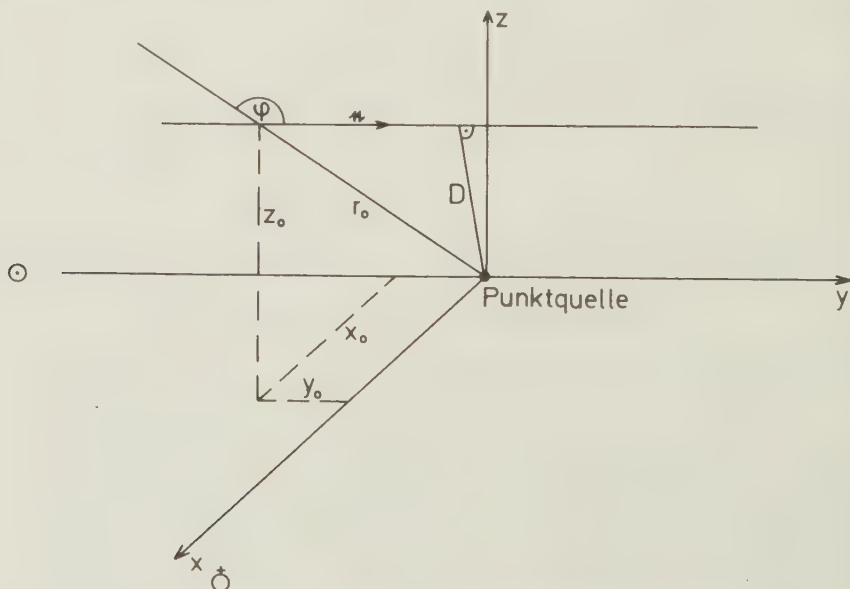
- Stöße der H-Atome untereinander und mit den Molekülen. Hierdurch wird eine Abkühlung der H-Atome und eine Abweichung von der radialen Geschwindigkeitsverteilung bewirkt.
- eine Verformung der Wolke durch den auf die H-Atome wirkenden Sonnenlichtdruck bzw. durch eine ungleichförmige Bewegung des Kometen. Letztere kann höchstens für sonnennahe Kometen in der Nähe ihres Perihels eine Rolle spielen.
- die allmähliche Vernichtung der H-Atome durch Ionisation.
- die natürliche Linienbreite und das daraus resultierende Dämpfungsprofil, das in den extremen Linienflügeln eine Rolle spielt.

III. Analytische Behandlung für Einfachstreuung

1.) Die Gesamtintensität

Als Vorstufe zur Lösung des Strahlungstransportproblems mit der Monte-Carlo-Rechnung (Kapitel IV) und vor allem als Kontrolle bzw. Näherung wird die Resonanzemission mit nur einmaliger Streuung des Quants unter Berücksichtigung der optischen Tiefe für die einfliegenden Photonen berechnet.

Dazu führen wir ein kartesisches Koordinatensystem ein, dessen Ursprung mit dem Kometenkern zusammenfällt. Die Sonne liegt in negativer y-, die Erde in positiver x-Richtung. (Der Winkel Sonne-Komet-Erde ist zu $\frac{\pi}{2}$ angenommen.)



Alle auftretenden Längen werden wiederum in Einheiten von

$$D_0 = z_0 \frac{Q_w}{v_H} \sqrt{\pi} \text{ gemessen.}$$

Wenn wir die sich aus der Zeichnung ergebenden geometrischen Zusammenhänge

$$\cos \varphi = \frac{y}{r}, \quad D = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad \tan \varphi = \frac{D}{y}, \quad d(\cos \varphi) = \frac{x^2 + z^2}{r^2} dy, \quad r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

in das Differential $d\tau_y$ einsetzen, erhalten wir

$$d\tau_y(\xi, x, y, z) = \mp \frac{2}{\sqrt{\pi}} \xi e^{-\xi^2 \frac{x^2 + y^2 + z^2}{y^2}} \frac{dy}{y^2} \quad \text{für } \xi \cdot y > 0$$

Oder bei Integration von $-\infty$ bis y ($\xi < 0$) bzw. 0 bis y ($\xi > 0$)

$$\begin{aligned} \tau_y(\xi, x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} e^{-\xi^2} \phi\left(-\xi \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{y^2}}\right) \quad y < 0, \xi < 0 \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} e^{-\xi^2} \phi\left(\xi \sqrt{\frac{x^2 + z^2}{y^2}}\right) \quad y > 0, \xi > 0 \end{aligned}$$

Von dem Strahlungsstrom pro Frequenzintervall $\pi F_\nu(x, y, z)$ in y -Richtung wird an der Stelle (x, y, z) der Bruchteil

$$d(\pi F_\nu(x, y, z)) = \pi F_\nu(x, y, z) d\tau(\nu, x, y, z)$$

absorbiert. Auf dem Wege durch die Wasserstoffwolke bis zu der Stelle (x, y, z) hat der solare Strahlungsstrom $\pi F_{0\nu}$ geschwächt durch die optische Tiefe τ_y abgenommen auf

$$\pi F_\nu(x, y, z) = \pi F_{0\nu} e^{-\tau_y(\nu)}$$

Mit Hilfe der obigen Gleichungen können wir den Bruchteil der bei (x, y, z) zwischen y und $y+dy$ absorbierten Strahlung in Abhängigkeit vom solaren Strahlungsstrom angeben. Unter Beachtung von $\pi F(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \pi F(\mathbf{r}) \Delta V_b d\mathbf{f}$ setzen wir ein

$$d(\pi F_f(x, y, z)) = \pi F_{of} e^{-\tau_y} d\tau_y$$

und weiter

$$d(\pi F_f(x, y, z)) = \pi F_{of} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} e^{-\xi^2} \phi\left(-\xi \sqrt{\frac{x^2+z^2}{y^2}}\right)\right] \frac{2}{\sqrt{\pi}} |\xi| e^{-\frac{\xi^2 x^2 + y^2 + z^2}{y^2}} \frac{dy}{y^2},$$

für $\xi > 0$ ist ϕ durch ϕ_c zu ersetzen.

Die Gesamtzahl der absorbierten Quanten in einer Säule längs der x-Richtung vom Querschnitt Eins an der Stelle (y, z) der Wasserstoffwolke ergibt sich durch Integration über x und ξ

$$E(y, z) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{y^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \pi F_{of} \int_0^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}} e^{-\xi^2} \phi\left(\xi \sqrt{\frac{x^2+z^2}{y^2}}\right)\right] \xi e^{-\frac{\xi^2 x^2 + y^2 + z^2}{y^2}} dx d\xi,$$

bzw. ϕ_c für ξ und $y > 0$

Durch Multiplikation mit dem Faktor $\frac{3}{16\pi}$ erhalten wir hieraus die Intensität $\left[\frac{\text{Photonen}}{\text{cm}^2 \text{ sec sterad}}\right]$ der zur Erde fliegenden einfach gestreuten Quanten. Der Faktor folgt aus dem Dipolstreugesetz, da hier der Winkel Sonne-Komet-Erde zu $\frac{\pi}{2}$ angenommen ist. Die Emission ist um den Faktor $3/4$ kleiner als sie es bei einem isotropen Streugesetz wäre.

Die doppelte Integration wurde numerisch durchgeführt mit einem vom Autor entwickelten Programm, dem die Trapezregel mit sich automatisch dem Fehler anpassender Schrittweite zugrunde liegt.

Mit Hilfe dieser Integration wurden neben Kontrollrechnungen die Beiträge der äußeren durch die Monte-Carlo-Rechnung nicht erfaßten Schicht der Wasserstoffwolke berechnet.

2.) Das Linienprofil

Wir wollen jetzt die Frequenzverteilung innerhalb der Emissionslinie untersuchen.

Für die Absorption eines Quants galt $\xi - \eta \cdot \cos \varphi = 0$ oder im atomaren System $\mu = \nu_0$. Die gleichen Bedingungen gelten auch für die emittierte Frequenz $\xi' - \eta' \cos \varphi' = 0$ bzw. $\mu' = \nu_0$. Da sich die Geschwindigkeit η des Atoms während seiner Anregung nicht ändert (die Impulsänderung durch das absorbierte Quant wird außer acht gelassen), gilt die Wiederverteilungsfunktion (Hummer 1962)

$$p(\mu, \mu') d\mu' = \delta(\mu - \mu') d\mu'.$$

Aus $\eta = \eta'$ folgt

$$\xi / \cos \varphi = \xi' / \cos \varphi'$$

und die Wiederverteilungsfunktion im raumfesten System

$$p(\xi, \xi') d\xi' = \text{const.} \cdot \delta\left(\xi - \xi' \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}\right) d\xi'$$

Durch die Normierungsbedingung $\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \xi') d\xi' = 1$ erhalten wir

$$p(\xi, \xi') d\xi' = \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'} \delta(\xi - \xi' \frac{\cos \varphi}{\cos \varphi'}) d\xi'$$

Für die zur Erde emittierte spezifische Intensität $I_b(\xi')$ gilt, da $\cos \varphi = \frac{x}{r}$ und $\cos \varphi' = \frac{y}{r}$

$$I_b(\xi') = \frac{3}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi) p(\xi, \xi') d\xi = \frac{3}{16\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} I(\xi) \frac{y}{x} \delta(\xi - \xi' \frac{y}{x}) d\xi$$

$I(\xi)$ war der pro Frequenzintervall absorbierte Fluß $\frac{dE}{d\xi}$ und wir erhalten nach Ausführung der Integration über ξ

$$I_b(\xi', y, z) = \frac{3}{16\pi} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \pi F_0 \xi' \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2+z^2}}\right] e^{-\xi'^2 \frac{y^2}{x^2}} \phi\left(\xi' \frac{\sqrt{x^2+z^2}}{x}\right) \frac{e^{-\frac{x^2 y'^2 z^2}{x^2} \xi'^2}}{x^2} dx$$

bzw. ϕ_c für $y > 0$

Der solare Strahlungsstrom wurde dabei innerhalb der Linie als konstant angesehen und vor das Integral gezogen.

Die endliche Ausdehnung der Wasserstoffwolke wird einfach berücksichtigt, indem τ_y durch $\tau_y - \tau_a$ ersetzt wird. τ_a wäre die optische Tiefe in y-Richtung vom Unendlichen bis zur Grenze der Wolke.

IV. Die Monte-Carlo-Methode

1.) Überblick

Bekanntlich sind Strahlungstransportprobleme mathematisch schwierig und aufwendig zu behandeln. Erst in jüngerer Zeit gelang es, mehrdimensionale Probleme in Näherung zu lösen, meist durch Zurückführung auf eine Dimension. Nicht nur bei Sternatmosphären, wo die eindimensionale Lösung sehr gute Ergebnisse liefert, sondern häufig auch für die Erd- und Planetenatmosphären, die von den Raumsonden genauer gemessen werden, wurden große Anstrengungen für die Lösung im Mehrdimensionalen unternommen. Eine Komplizierung der Geometrie macht aber meist eine Vereinfachung des Absorptionskoeffizienten nötig.

Die Monte-Carlo-Methode setzt der geschlossenen Lösung die Berechnung einer Reihe von stochastischen Einzelschritten entgegen. Der Ablauf von physikalischen Prozessen wird mit der Rechenmaschine nachvollzogen.

In unserem Problem wird der Weg eines Photons durch das streuende Medium simuliert, wobei der jeweilige Wert der verschiedenen Größen in den Einzelprozessen mit Hilfe von vorgegebenen Zufallszahlen bestimmt wird. Die Zufallszahlen Z sollten Resultate echter Zufallsprozesse und in dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilt sein. Da eine solche Herstellung zu aufwendig ist, benutzt man bestimmte arithmetische Prozesse, um Pseudozufallszahlen anzugeben (siehe Abschnitt IV.3). Der "Lebenslauf" eines Photons setzt sich dann aus folgenden Schritten zusammen:

1. Bestimmung der Eintrittskordinate, Frequenz und des Gewichts
2. " des Absorptionspunktes
3. " der neuen Flugrichtung und Frequenz
4. " der eventuellen nochmaligen Absorption, dann wieder 3.
5. " der Austrittskordinaten, Frequenz und deren Speicherung.

Die Rechnungen wurden auf einer IBM Maschine Modell 360/91 durchgeführt.

Für das gerechnete Modell wurden 9 Mill. Streuungen in 1 Stunde Rechenzeit registriert (mit rund 10^3 Rechenoperationen pro Streuvorgang).

2.) Beschreibung der einzelnen Schritte im Monte-Carlo-Verfahren

Wir führen wieder ein rechtwinkliges Koordinatensystem ein mit dem Zentrum im Kometenkern, die Sonne liegt in negativer y-Richtung. z steht senkrecht auf der Ebene Sonne-Komet-Erde. Die Intensität des solaren Ly- α Lichtes wird innerhalb der Kometenlinie als konstant angesehen. Eine Berücksichtigung der Frequenzabhängigkeit ließe sich aber leicht z.B. mit der "Zurückweisungsmethode" (s.u. bei der Bestimmung des Streuwinkels) realisieren.

Es wird eine maximale Frequenz $\xi_{\max}$ vorgegeben, so daß alle einfallenden Frequenzen gleichverteilt nur in dem Intervall

$$-\xi_{\max} < \xi < \xi_{\max} \quad \text{liegen.}$$

$$\xi = (2Z - 1) \xi_{\max} \quad Z = \text{Zufallszahl}$$

Als nächstes wird der Stoßparameter D bestimmt. Wir wählen einen maximalen Radius $R_{\max}$ um den Mittelpunkt: innerhalb der so beschriebenen Kugel soll die Monte-Carlo-Rechnung für die Mehrfachstreuung angewandt werden. Außerhalb der Kugel mit $r > R_{\max}$ spielt Mehrfachstreuung keine Rolle mehr, da die optische Tiefe zu gering ist. Wir wählen $R_{\max} = 10$, dies entspricht einer tangentialen optischen Tiefe in der Linienmitte von $\tau(0) = 1/R_{\max} = 1/10$. Zur Bestimmung eines Zufallswertes für den Stoßparameter, wie im Folgenden auch für die Bestimmung der anderen Zufallsgrößen, benutzt man das folgende bei Cashwell und Everett (1959) beschriebene Prinzip.

Wenn $p(x)dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß ein Ereignis zwischen x und $x + dx$ stattfindet und $a \leq x \leq b$ sowie $\int_a^b p(x)dx = 1$ gilt, dann bestimmt wegen $p \geq 0$

$$Z = P(x) = \int_a^x p(x') dx'$$

x eindeutig als Funktion von Z . Wenn die Größen Z im Intervall $(0,1)$ gleichverteilte Zufallszahlen sind, so fällt x mit der Häufigkeit $p(x)dx$ in das Intervall $(x, x+dx)$. $P(x)$ ist die Verteilungsfunktion

$$0 \leq P(x) \leq 1$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon aus einem räumlich gleich-dichten Strom, der auf eine Scheibe mit dem Radius $R_{\max}$ fällt, in dem Kreisring zwischen D und $D + dD$ einfällt, ist

$$p(D)dD = 2 \frac{D}{R_{\max}^2} dD$$

Daraus ergibt sich $D = R_{\max} \cdot \sqrt{Z}$. Da das für die Mehrfachstreuungen wichtige Gebiet mit $D \leq 1$ wegen der quadratischen Zunahme von $P(D)$ nur selten getroffen wird, soll der hier wie auch bei einigen anderen Prozessen für die Monte-Carlo-Methode überaus wichtige und fruchtbare Kunstgriff der Wichtung benutzt werden. Bei der Methode der Wichtung wird die wahre Wahrscheinlichkeitsdichte $p(x)$ durch eine neue $p'(x)$ ersetzt, um damit zu erreichen, daß eine Zufallsvariable öfter in ein bestimmtes Teilintervall fällt. Damit sich die Physik des Prozesses nicht ändert, muß der Fehler durch die Korrektur des Photengewichts wieder aufgehoben werden. Man kann zeigen, daß durch geeignete Wichtung der wahrscheinliche Fehler der Monte-Carlo-Rechnung verringert wird (Schneider 1964). Für das korrigierte Gewicht gilt (House and Avery 1969)

$$w'(x) = \frac{\frac{dP(x)}{dx}}{\frac{dP'(x)}{dx}} \cdot w(x)$$

oder

$$p(x) w(x) dx = p'(x) \cdot w'(x) dx$$

Am Beginn seines Fluges wird jedem Photon das Gewicht $w = 1$ zugeordnet. Bei jeder neuen Wichtung wird das alte Photengewicht mit dem neuen Gewichtungsfaktor multipliziert. Wir führen als neue Wahrscheinlichkeitsdichte $p'(D)$

$$p'(D) dD = \frac{1}{R_{\max}} dD$$

ein. Damit werden große und kleine D gleich häufig. Der Gewichtungsfaktor erhält die Form

$$w'(D) = \frac{p(D) \cdot w(D)}{p'(D)} = \frac{2D}{R_{\max}^2} \cdot 1 \cdot R_{\max} = \frac{2D}{R_{\max}}$$

Zu $D = Z \cdot R_{\max}$ gehört also $w' = 2Z$.

Im nächsten Schritt soll die Flugbahnlänge ℓ des Photons bestimmt werden. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Photon zwischen τ und $\tau + d\tau$ absorbiert wird ist

$$p(\tau) d\tau = e^{-\tau} d\tau$$

Wie oben gilt weiter

$$Z = P(\tau) = \int_0^{\tau} e^{-\tau'} d\tau' = 1 - e^{-\tau}$$

Die Umkehrung lautet

$$\tau = -\ln(1-Z),$$

da Z in $(0,1)$ gleichverteilt ist, können wir dafür auch

$$\tau = -\ln Z$$

schreiben.

Es galt

$$\int_0^{\ell} x(\ell') d\ell' = \tau$$

Durch Umkehrung erhalten wir ℓ als Funktion von τ bzw. von Z

$$\ell = g(Z)$$

Damit diese Umkehrung möglichst einfach durchzuführen ist, wurde oben die spezielle Form der radialen Geschwindigkeitsverteilung gewählt. Wie wir sofort sehen, ermöglicht sie sowohl eine einfache τ -Integration als auch deren Umkehrung mit Hilfe der umgekehrten Fehlerfunktion.

Wir fanden

$$\tau(\xi, \gamma) = \frac{1}{D} e^{-\xi^2} (\phi(\xi t_g \gamma) - \phi(\xi t_g \gamma_1))$$

τ und der Anfangswert γ_1 seien vorgegeben

$$\underbrace{(De^{\xi^2} \tau + \phi(\xi t_g \gamma_1))}_T = \phi(\xi t_g \gamma)$$

$$T = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\xi t_g \gamma} e^{-t^2} dt$$

$$T = 1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \int_u^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$\frac{1-T}{2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_u^\infty e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$$u = \sqrt{2} \xi t_g \gamma$$

Hastings (1955) gibt eine Tschebyscheffapproximation für

$$u = G\left(\frac{1-T}{2}\right) \Rightarrow t_g \gamma = h(\tau) \quad \text{und somit} \quad \ell = g(Z)$$

Falls die vorgegebene optische Tiefe τ größer als diejenige längs der Flugbahn des Photons in dem Gebiet $r \leq R_{\max}$ ist, durchfliegt das Photon den Kometen ohne Absorption. Da dieser Fall sehr häufig vorkommt (denn bei $R_{\max} = 10$ ist $\tau_t(0)$ für 90% der eingeschossenen Photonen kleiner τ), wurde wieder die Methode der Wichtung angewandt und die Absorption erzwungen.

Bis zum Erreichen des Gebietes mit $r \leq R_{\max}$ muß das Photon bereits die optische Tiefe τ_a durchfliegen, die sich wie oben gezeigt für $\text{tg } \varphi_a = \frac{D}{\sqrt{R_{\max}^2 - D^2}}$ berechnen läßt. Ebenso die optische Tiefe τ_t bis zum Verlassen des inneren Gebietes. Damit jedes Photon im Bereich $r \leq R_{\max}$ absorbiert wird, muß die vorgegebene optische Tiefe τ zwischen τ_a und τ_t liegen. Wir haben hier also nicht den normalen Fall "kleiner optischer Tiefe" (Cashwell und Everett 1959), sondern wir wählen ein kurzes Stück aus einem Gesamtweg.

Die Absorptionswahrscheinlichkeit zwischen τ_a und τ_t ist

$$P(\tau_a < \tau < \tau_t) = \int_{\tau_a}^{\tau_t} e^{-\tau'} d\tau' = e^{-\tau_a} - e^{-\tau_t}$$

Wir normieren auf Eins und erhalten für die Wahrscheinlichkeit, daß das Photon bei τ absorbiert wird

$$P(\tau) = \frac{\int_{\tau_a}^{\tau_t} e^{-\tau'} d\tau'}{e^{-\tau_a} - e^{-\tau_t}} \quad \text{mit } \tau_a < \tau < \tau_t$$

Setzen wir wieder $P(\tau) = Z$, einer Zufallszahl, und lösen wir nach τ auf, so erhalten wir für das zufällig vorgegebene τ , das zwischen τ_a und τ_t liegt,

$$\tau = \ln(e^{-\tau_a} - Z \cdot (e^{-\tau_a} - e^{-\tau_t}))$$

Das Gewicht des Photons muß entsprechend von w auf

$$w' = w (e^{-\tau_a} - e^{-\tau_t})$$

abgeändert werden.

Da solche Wichtungen und die geänderten Verteilungen zwar im stochastischen Grenzwert für unendlich viele Vorgänge die Ergebnisse nicht abändern, aber bei einer nur endlichen Auswahl, wie sie bei jeder konkreten Rechnung nur getroffen werden kann, in Extremfällen durchaus die Rechenergebnisse verfälschen können, wurde auch eine Rechnung ohne im Gebiet $r \leq R_{\max}$ erzwungene Absorption zum Vergleich durchgeführt. Eine Verfälschung wurde nicht festgestellt. Die Zeitersparnis für die Rechnung mit erzwungener Absorption war über 30%.

Die Lage des Absorptionspunktes des einfliegenden Photons wird außer durch D und τ durch den Drehwinkel ψ um die y -Achse bestimmt.

$$\begin{aligned} y_A &= D / \operatorname{tg} \psi \\ R_A &= \sqrt{y_A^2 + D^2} \\ X_A &= \cos \psi \cdot R_A \\ Z_A &= \sin \psi \cdot R_A \end{aligned}$$

Um Rechenzeit zu sparen wurde eine von Shreider (1964) beschriebene Methode zur Berechnung von $\sin \psi$ und $\cos \psi$, wenn ψ in dem Intervall $[0, 2\pi]$ gleich verteilt ist, angewandt. Sie erlaubt es, die beiden trigonometrischen Größen direkt aus den Zufallszahlen zu bestimmen (Zurückweisungsmethode s.u.).

Die neue Richtung $\mathbf{n}'$ des gestreuten Photons bestimmt sich nach dem Dipolgesetz. Der Winkel β zwischen den Richtungen $\mathbf{n}$ und $\mathbf{n}'$ ist unabhängig von dem Zustand des Atoms, es gilt

$$g(\mathbf{n}, \mathbf{n}') d\Omega = \frac{3}{16\pi} (1 + \cos^2\beta) d\cos\beta d\vartheta$$

Der Azimut ϑ um $\mathbf{n}$ ist gleichverteilt, also

$$p(\beta) d\beta = \frac{3}{8} (1 + \cos^2\beta) d\cos\beta = \frac{3}{8} (1 + x^2) dx$$

Zur Berechnung von $x = \cos\beta$ nach der obigen Verteilung benutzen wir die von v. Neumann (1963) angegebene "Zurückweisungsmethode".

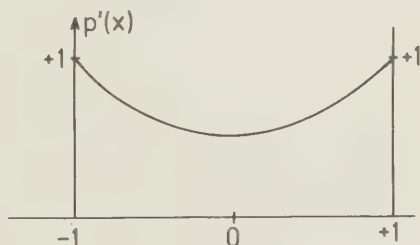
Wir bilden die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$\begin{aligned} p'(x) dx &= \frac{p(x)}{\max_{x \in (q_1)} p(x)} dx \\ &= \frac{1}{2} (1 + x^2) dx \end{aligned}$$

Jetzt wählen wir

$$x = 2 Z_1 - 1$$

und Z_2 (Z_1, Z_2 Zufallszahlen)



Falls $Z_2 > 1/2 (1 + x^2)$ werden die beiden Zufallszahlen Z_1 und Z_2 weggeworfen und zwei neue bestimmt, bis $Z_2 < 1/2 (1 + x^2)$. Weil $P'(x)$ der unter der Linie $p'(x)$ liegenden Fläche entspricht, ist dies einer Integration über $p'(x)$ äquivalent. Der Azimut ϑ um $\mathbf{n}$ wird aus $\vartheta = 2\pi \cdot Z$ bestimmt.

Zur Erde - d.h. in einen vorgegebenen Raumwinkel in Richtung Erde - fliegen nur wenige Photonen. Mit Hilfe einer Koordinatentransformation kann man durch die Einbeziehung aller derjenigen Photonen, die die Wasserstoffatmosphäre auf Grund der Zylindersymmetrie um die Achse Sonne-Komet in analoger Weise verlassen, ihre Anzahl vergrößern. Die aus den optisch tiefen Zentralgebieten kommenden Photonen müssen aber viele Streuvorgänge durchlaufen bis sie den Kometen verlassen können. Damit jede Absorption möglichst viel Information bringt, benutzen wir unter Verzicht auf die Vorteile der Symmetrieverhältnisse eine Art "Aufspaltungstechnik" (Hammersley und Handscomb 1964). Wir denken uns jedes Photon mit dem Gewicht w durch zwei ersetzt, von denen eines mit dem Gewicht w_E zur Erde, das andere in eine beliebige Richtung mit dem Gewicht w' fliegen soll. Es muß natürlich gelten

$$w = w' + w_E$$

Wenn p_E die Wahrscheinlichkeit dafür ist, daß das Photon die Erde erreicht, so ist

$$w_E = w \cdot p_E \quad \text{und} \quad w' = w \cdot (1 - p_E)$$

Falls das Photon mit w' zufällig zur Erde fliegen sollte, wird es zurückgewiesen und ein neuer Satz Parameter für den Weiterflug bestimmt. Die Wahrscheinlichkeit, daß das Photon in den Raumwinkel 1 in Richtung n_E zur Erde fliegt, ist

$$p(\cos \beta_E) = \frac{3}{4\pi} (1 + \cos^2 \beta_E)$$

Die Wahrscheinlichkeit, daß es auf dem Weg absorbiert wird ist

$$P(\tau < \tau_E) = 1 - e^{-\tau_E} \text{ bzw. } P(\tau > \tau_E) = e^{-\tau_E}$$

also

$$P_E = p(\cos \beta_E) P(\tau > \tau_E) = \frac{3}{4\pi} (1 + \cos^2 \beta_E) e^{-\tau_E}$$

Die Frequenz ergibt sich zu $f_E = f \frac{\cos \varphi_E}{\cos \varphi}$ wobei $\varphi = \varphi(n, \kappa)$
 $\varphi_E = \varphi(n_E, \kappa)$

Die Koordinaten des Streupunktes und die Frequenz sowie das Gewicht w_E werden gespeichert.

Für das weiterfliegende Photon werden n' und $f' = f \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi}$ mit $\cos \beta$ und ν berechnet und ein neues τ vorgegeben. Daraus ergibt sich der neue Absorptionspunkt $\kappa' = \kappa + n'l$, oder das Photon verläßt den Kometen und ein neues Sonnenphoton wird "geschaffen".

In Kernnähe für kleine Stoßparameter D kann die optische Tiefe groß werden, und das Photon wird sehr häufig gestreut, bis es aus dem dichten Bereich herausdiffundiert ist. Damit diese wenigen Photonen nicht einen merklichen Bruchteil der Rechenzeit beanspruchen, muß ihre Diffusion beschleunigt werden. In einem isotropen optisch dichten Gas wird das Photon gelegentlich in die Linienflügel gestreut, indem es zufällig von einem sehr schnellen Atom mit geeigneter Richtung absorbiert wird. Die optische Tiefe ist dann entsprechend der großen Frequenz nach der Emission klein.

Anders ist es bei einer radialen Geschwindigkeitsverteilung. Da hier alle Atome an einem Ort nur in eine Richtung fliegen, kann nur ein Atom mit einer durch die geometrischen Verhältnisse bestimmten Geschwindigkeit absorbieren. Um dennoch ein schnelleres Entweichen des Photons zu erreichen, wird das Diffundieren in die Linienflügel imitiert. Nach jeweils einer bestimmten Anzahl von Streuungen N_s eines Photons wird seine Frequenz so geändert, daß die tangentielle optische Tiefe $\tau' = \frac{e^{-f^2}}{D}$ einen bestimmten Wert $\tau_s (= 10)$ annimmt. Die hierzu notwendige Frequenz ergibt sich zu $f' = \sqrt{-\ln(\tau_s \cdot D)}$; falls $\tau' < \tau_s$ war, wurde f nicht geändert.

Für $N_s = 50$ waren selbst aus dem zentralen Teil des Kometenbildes mit $D < 5 \cdot 10^{-6}$ nur 2 Prozent der Photonen von dieser Änderung betroffen.

Um aus den gespeicherten Erdphotonen die Intensität zu bestimmen, muß das Kometenbild in kleine Testflächen (Kanäle) eingeteilt werden. Die Gewichte der durch eine Fläche F fliegenden Photonen werden aufaddiert. Die mittlere Intensität aus dieser Fläche ergibt sich dann zu

$$I_F = \frac{\sum w_i}{F}$$

Nach geeigneter Normierung (s.u.) wurde zu der Intensität aus dem inneren Teil $r < R_{\max}$ noch der Anteil der äußeren Schichten der Wasserstoffwolke durch numerische Integration für die Einfachstreuung berechnet und zu den Ergebnissen der Monte-Carlo-Rechnung addiert. Bei der Bildung der Isophoten wurde das Kometenbild in eine 90×90 Raster eingeteilt. Die Intensitäten der

einzelnen Quadrate wurden in den äußeren Teilen des Kometenbildes nochmals nach dem Prinzip des gleitenden Mittels mit allen 8 angrenzenden Nachbarn gemittelt, um die statistischen Schwankungen auszugleichen. Sodann wurden die Quadrate gleicher Intensität miteinander durch die Isophote verbunden. Durch geeignete Wahl der absoluten Rastergröße kann die Auflösung dem Meßinstrument, das zur Registrierung der Isophoten benutzt wurde, angepaßt werden, falls bei zu starker Auflösung die statistischen Schwankungen der Monte-Carlo-Ergebnisse nicht zu groß werden.

Die lineare Auflösung liegt dabei zwischen ein und zwei Kantenlängen eines Rasterfeldes. Eine Registrierung der Photonenfrequenzen eines bestimmten Gebietes liefert das für diese Region typische Linienprofil des Kometen.

Die mit der Monte-Carlo-Methode gerechneten Intensitäten werden so normiert, daß sie mit den numerischen Rechnungen für die Einfachstreuung direkt verglichen werden können.

Hierzu werden alle Gewichte mit $\pi F_R(f)$ dividiert. F_R ist der gerechnete Sonnenfluß

$$\pi F_R = \frac{\sum w_{Ein}}{2 \cdot f_{max} \cdot \pi \cdot R_{max}^2}$$

w_{Ein} = Gesamtgewicht der Sonnenphotonen

Die absoluten Intensitäten erhält man dann durch Multiplikation mit

$$\pi F_{0v} \cdot \Delta v_0 = \pi F_{0f}$$

3.) Der Zufallszahlengenerator

Einer der wichtigsten Teile der Monte-Carlo-Rechnung ist der Zufallszahlengenerator.

Die Generatoren benutzen i.a. mathematische Gesetze, um Pseudo-zufallszahlen, die in dem Intervall $(0,1)$ möglichst gleichverteilt sind, zu erzeugen. Für die Gleichverteilung gibt es viele verschiedene Tests, die aber jeweils nur einen Aspekt untersuchen. Wir verweisen hierzu auf die Literatur (z.B. Jansson 1966, Shreider 1964, Cashwell und Everett 1959).⁺⁺)

Es wurde der von MacLaren und Marsaglia (1965) entworfene Generator RNDM in der Modifikation für die 360/91 benutzt. Er ist ausführlich von Gorenflo und Pacco (1966) getestet worden und hat sich bei der Blasenkommergruppe des Max-Planck-Instituts für Physik und Astrophysik seit Jahren bestens bewährt. Auf eigene Tests wurde daher verzichtet.⁺)

⁺) Zunächst wurde der in den Programmen der IBM 360/91 implementierte Zufallszahlengenerator RANDU benutzt. Jedoch zeigten sich starke Abweichungen von der zufälligen Gleichverteilung bei Serien von mehreren Zufallszahlen hintereinander, was speziell bei der Zurückweisungsmethode außerordentlich störend war.

⁺⁺) Außerdem sei hingewiesen auf die sehr ausführliche Untersuchung und Darstellung von verschiedenen Generatoren in der Dissertation von Maria G. Firneis: Zufallszahlengeneratoren und stellarstatistische Probleme, Wien 1970.

V. Ergebnisse und Vergleich mit den Messungen

1.) Modellparameter der Monte-Carlo-Rechnung

Mit Hilfe des Monte-Carlo-Programms wurde ein Modell mit Mehrfachstreuung gerechnet. Wir fassen die numerischen Werte für die dabei benutzten Parameter zusammen.

Der Radius $R_{\max}$ des Gebietes um die Punktquelle, in dem Mehrfachstreuung zugelassen war, beträgt $R_{\max} = 10$ in Einheiten von

$$D_0 = \alpha_0 \frac{C_w}{v_H} \sqrt{\pi}.$$

Der eingestrahelte Sonnenfluß wird als konstant in der Frequenz angesehen. Gerechnet wurde die Absorption in einer Frequenzbreite

$$-f_{\max} < f < f_{\max} \text{ mit } f_{\max} = 4 \text{ in Einheiten von } \Delta\nu_D = \frac{v_0}{c} \nu_0.$$

Die Anzahl N_s von Streuungen eines Photons bis es frequenzverschoben wird (falls $\tau > \tau_s = 10$) war $N_s = 50$.

Die Gesamtausdehnung der Wasserstoffwolke wurde mit $R_g = 40$ angenommen (die Größe wird weiter unten begründet, vergl. V.4).

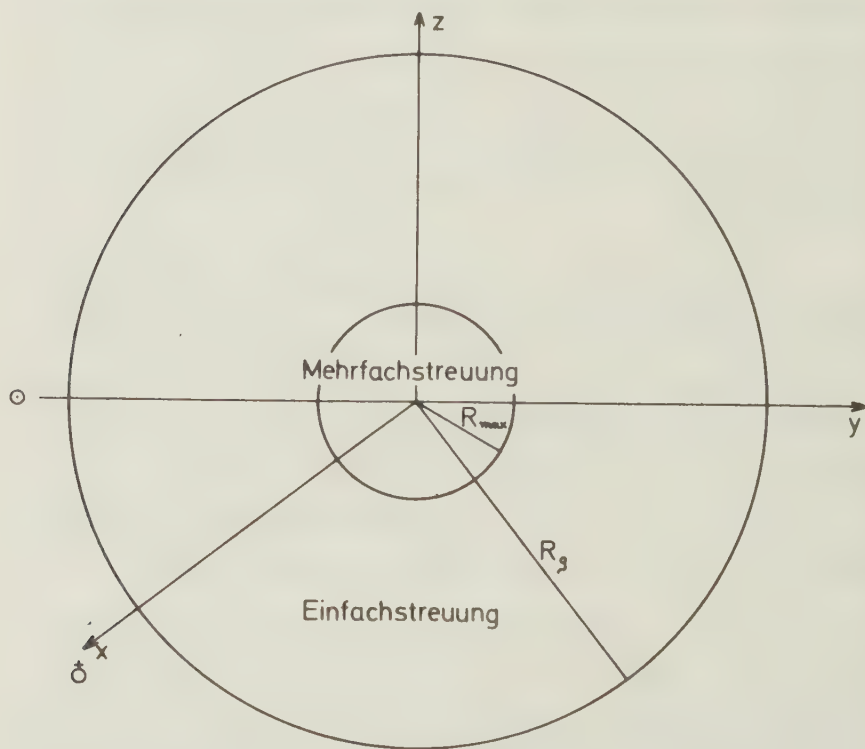
Der Phasenwinkel α (Sonne-Komet-Erde) beträgt $\frac{\pi}{2}$. Aus dem Gebiet $r < R_{\max}$ wurden 9 Mill. zur Erde fliegende Photonen registriert.

Die Photonen wurden in ein Raster von 90×90 Feldern eingeteilt. Zu jedem Rasterfeld wurde mit Hilfe der Integrale für Einfachstreuung die Intensität der über dem Feld liegenden Kugelschale mit $R_{\max} < r < R_g$ numerisch gerechnet und zu der Intensität aus der Monte-Carlo-Rechnung addiert.

Es wurden 2 verschiedene Auflösungen des Kometenbildes ausgewählt.

Der Ausschnitt bei gleicher Rasterzahl beträgt $|y_{\max}| = |z_{\max}| = 3;11$.

Die äußeren Rasterfelder werden nach dem Prinzip des Gleitenden Mittels geglättet.



Weiterhin wurde das Linienprofil des gesamten Mehrfachstreu-gebietes sowie von einzelnen Teilgebieten registriert.

2.) Interpretation der Monte-Carlo-Rechnung

Die in den Abbildungen 9 und 10 mit verschiedener Auflösung gezeigten Isophoten weichen von solchen, die ein Modell mit isotropem Absorptionskoeffizienten liefern würde - nämlich infolge der Abschattung der gesamten Wolke an der sonnenabgewandten Seite eingedrückte Kreise - in mehreren Details ab.

In der radialen Geschwindigkeitsverteilung sind sinnvollerweise nur auswärts gerichtete Geschwindigkeiten zugelassen; deshalb haben sämtliche Atome auf der sonnenzugewandten Seite der Wasserstoffwolke ($y < 0$) eine positive Geschwindigkeitskomponente in Richtung zur Sonne, während auf der sonnenabgewandten Seite ($y > 0$) die Verhältnisse gerade entgegengesetzt sind.

Auf Grund der Absorptionsbedingung $f \cdot \cos \varphi > 0$ können positive Frequenzen nur in der sonnenfernen, negative nur in der sonnennahen Hälfte absorbiert werden.

Die positiven Linienfrequenzen f werden von der vorderen Hälfte überhaupt nicht beeinflusst und umgekehrt. Die beiden Hälften sind solange wir nur Einfachstreuung betrachten optisch vollständig entkoppelt.

Bei der Einfachstreuung bildet jede Wasserstoffwolkenhälfte ein abgeschlossenes System und hat folglich ein eigenes Maximum der Intensitätsausstrahlung. Diese bleiben auch bei Mehrfachstreuung sichtbar. Die vordere Hälfte mit positiver Radialgeschwindigkeitskomponente ($y < 0$) zeigt ein Maximum bei $y_m = 0,17$, $z_m = 0$, in Einheiten von $D_0 = \frac{Q_W}{v_H} x \sqrt{\pi}$ gemessen (y_m wurde numerisch mit dem Integral für Einfachstreuung bestimmt). Die Maximalintensität ist

auch ohne Berücksichtigung der optischen Tiefe zur Erde hin endlich, da auch das Dichteintegral außerhalb des Ursprungs endlich ist. Die hinter y_m gelegenen Atome werden entsprechend $e^{-\tau_y}$ ($\tau_y \propto 1/r$) so stark abgeschattet, daß selbst ihre Zunahme mit $1/r^2$ zum Ursprung hin nicht ausreicht, um diesen Effekt auszugleichen.

Weit stärker - bei der Rechnung mit Einfachstreuung unendlich - ist das Hauptmaximum sofort hinter dem Ursprung. Die hohe Zentraldichte der Wasserstoffatome wird bei $y \geq 0$ ungehindert von den solaren Quanten erreicht. Das Fehlen der Abschattung macht sich deutlich bemerkbar in den Ausbuchtungen der Isophoten zu negativen bzw. positiven z-Werten hin unmittelbar nach der Ebene mit $y = 0$. Mit dem Übergang zu geringen Dichten in den äußeren Teilen - und damit zu geringen optischen Tiefen - nehmen die Ausbuchtungen ab; die Abschattung verliert ihre Bedeutung (vergl. Abb.10). Die oben beschriebenen Effekte sind so dominierend, daß auch die Mehrfachstreuung in dem inneren Teil der Wasserstoffwolke sie nur verwaschen aber nicht verdecken kann. In Abbildung 9 sind sie wegen der großen Auflösung deutlich zu erkennen.

Die Mehrfachstreuung verknüpft die beiden Hälften durch die unterschiedlichen Flugrichtungen der Photonen nach der ersten Streuung; wenn auch ein Photon nach der Emission an der Stelle π nur wieder an Orten π' mit $\pi \cdot \pi' > 0$ (d.h. nur auf seiner Seite der durch π definierten Ebene) absorbiert werden kann.

Die Isophoten, die nicht in unmittelbarer Nähe des Zentrums verlaufen (tangentielle optische Tiefe $\tau(0) > 1$), weichen im Gesamt-

bild kaum von der Kreisform ab. Die Abschattung auf der positiven y-Achse sind nur in deren unmittelbarer Nähe zu registrieren.

Die innersten Isophoten um das Hauptmaximum zeigen dagegen deutlich eine Elongation quer zur Richtung Sonne-Komet.

Insgesamt liegt das Gebiet maximaler Intensität hinter dem Zentrum auf der sonnenabgewandten Seite, im Gegensatz zu einem Modell mit isotropem Absorptionskoeffizienten, wo die sonnenabgewandten Teile abgeschattet werden.

Genauso wie die Hälften $y < 0$ bzw. $y > 0$ entkoppelt sind, so gilt dies auch für die Hälften $x < 0$ bzw. $x > 0$ bei den gestreuten Photonen.

Die Ausbeulungen in den Isophoten sind am besten zu beobachten, wenn der Phasenwinkel α (Sonne-Komet-Erde) $\frac{\pi}{2}$ beträgt. Dann verlaufen die Integrationswege für die Intensität parallel zur Ebene $y = 0$ und es wird jeweils nur eine der Halbkugeln (mit $y > 0$ oder $y < 0$) berührt. Bei Zu- oder Abnahme von α kommt an den Übergangsstellen (bei $y = 0$) die Intensität aus beiden Halbkugeln und der Übergang wird dadurch verwaschen. Ähnlich wirkt auch zu geringe Auflösung bei der Messung.

Das Verhalten des Absorptionskoeffizienten in Bezug auf die Frequenz und Winkelabhängigkeit zeigt sich in den Linienprofilen.

Wie erwartet gleicht die Linie des gesamten Gebietes mit $r < R_{\max}$ in der Frequenzabhängigkeit vollständig dem gemittelten Absorptionskoeffizienten (vergl. Abb.4).

$$\bar{k}(f) = \kappa_0 \frac{\sqrt{\pi}}{2} \phi_c(|f|)$$

Die geringfügige Asymmetrie ist auf die speziellen Bedingungen der Monte-Carlo-Rechnung zurückzuführen. Da bei den zur Erde fliegenden Photonen auch die optische Tiefe in dem Gebiet $R_{\max} < r < R_g$ berücksichtigt wurde, werden die positiven Frequenzen zusätzlich (außerhalb ihres Entstehungsgebietes) geschwächt. Bei einer korrekten Berücksichtigung der in der äußeren Kugelschale gestreuten Photonen würde dies ausgeglichen, da die Photonen mit positiver Frequenz in der erdugewandten Hälfte praktisch nicht geschwächt würden, diejenigen mit negativer aus der erdabgewandten Seite dagegen das optisch dichte Gebiet mit $r < R_{\max}$ durchlaufen müßten. Zu der positiven Seite der Linie würden also mehr Quanten als zur negativen zusätzlich beitragen. Die Differenz (kleiner als 2%) zeigt den Fehler, der sich aus der Vernachlässigung der optischen Tiefe für das Gebiet $R_{\max} < r < R_g$ ergibt.

Der Beitrag der Teile der Wasserstoffwolke mit großer optischer Tiefe zur Gesamtintensität der Linie ist so klein (die Fläche mit $\tau(0) > 1$ ist nur ein Hundertstel der Gesamtfläche), daß trotz der hohen Intensitäten dieser Gebiete keine merkliche Abweichung im Linienprofil zu erwarten ist.

Die Konsequenzen der rein radialen Verteilung machen sich im optisch dichten Gebiet der Wasserstoffwolke stärker bemerkbar.

In Abbildung 5 ist das Linienprofil der Strahlung aus dem Gebiet mit einer tangentialen optischen Tiefe in Linienmitte $\tau_t(0) > 10$ dargestellt. Die Linie zeigt eine ähnliche Intensitätsverminderung, wie man sie bei Emissionslinien von optisch dichten Gasen mit

isotropem Absorptionskoeffizienten infolge von Selbstabsorption findet. Doch die Einsenkung unserer Modellinie hat eine vollkommen andere Ursache. Die Einsenkung der Linie ist nur in dem Licht der sonnenabgewandten Seite mit $y > 0$ zu finden, wie wir aus dem Vergleich der Abbildungen 6 und 7, die jeweils die Linien aus Gebieten um die y-Achse mit $y = -0,3$ und $y = 0,3$ als Mittelpunkt darstellen, ersehen.

Das starke Hauptmaximum in der Hälfte $y > 0$ schattet die dahinter liegenden achsennahen Gebiete ab.

Die optische Tiefe $\tau = 1/D e^{-f^2} \phi_c(f \frac{D}{y})$ für $f > 0, y > 0$ nimmt mit $D \rightarrow 0$ stark zu, da auch $\phi_c(f \frac{D}{y})$ gegen eins geht. Für $y < 0, f < 0$ geht $\tau = 1/D e^{-f^2} \phi(f \frac{D}{y})$ dagegen nicht gegen große Werte, da $\phi(f \frac{D}{y}) \rightarrow 0$ für $D \rightarrow 0$.

Da die Flugrichtung der der positiven y-Achse nahen H-Atome mit der Richtung zur Erde (x-Achse!) praktisch dann einen Winkel von $\approx \frac{\pi}{2}$ bildet, liegen die aus diesem Gebiet registrierten Frequenzen in der Nähe von Null, denn es gilt

$$f_E = f \frac{\cos \varphi_E}{\cos \varphi}, \text{ d.h. } f_E \sim 0 \text{ für } \cos \varphi_E \approx 0$$

Bei genauerer Betrachtung der Linienprofile in den Abbildungen (5,6,7) erkennt man, daß die Profile keineswegs symmetrisch sind in Bezug auf die Frequenz $f = 0$. Man sieht, daß die kleinen positiven Frequenzen $f \geq 0$ stärker vertreten sind als die benachbarten negativen. Auch dieses ist ein Effekt der optisch un-

symmetrischen Kugelhälften. Für die optische Tiefe zur Erde hin von auf der erdabgewandten Seite $x < 0$ emittierten Frequenzen gilt

$$\tau_E = \frac{1}{D_E} \cdot \phi(\xi_E \operatorname{tg} \varphi_E) e^{-\xi^2} \quad \text{mit} \quad D_E = \sqrt{Z^2 + Y^2} \quad x < 0$$

$$\text{und} \quad \operatorname{tg} \varphi_E = \frac{D_E}{x} \quad \xi_E < 0$$

Für $x > 0$, $\xi_E > 0$ gilt

$$\tau_E = \frac{1}{D_E} \phi\left(\xi_E \frac{D_E}{x}\right) e^{-\xi_E^2}$$

Wählen wir zwei Punkte, die sich nur durch das Vorzeichen der x-Koordinate unterscheiden, so ist die optische Tiefe von der Sonne her zu diesen Punkten gleich, also ist die Absorption aller Frequenzen für beide Punkte gleich wahrscheinlich. Ebenfalls ist für beide $\xi_E \frac{D_E}{x}$ gleich.

Wenn wir jetzt ξ_E in beiden Punkten klein werden lassen, so gilt

$$\begin{array}{ll} \phi_c \rightarrow 1 & \\ \text{aber} \quad \phi \rightarrow 0 & \text{für} \quad \xi_E \rightarrow 0 \end{array}$$

Die optische Tiefe auf der erdabgewandten Seite nimmt zu, d.h. es können weniger Photonen mit kleinen negativen Frequenzen die Erde erreichen. Diese Asymmetrisierung der Linie kann mit der normalen Selbstabsorption verglichen werden. Sie findet jeweils nur in der einen Hälfte, d.h. für jede Seite der Linie getrennt statt.

Insgesamt zeigt die Linie des optisch tiefen Gebiets (Abb.5) aus den oben genannten Gründen zwar eine wesentliche Verbreiterung, aber

keine Verschiebung zu positiven Frequenzen hin, wie sie im gewöhnlichen Fall mit isotropem Absorptionskoeffizienten zu erwarten ist.

Wir erkennen, daß die Veränderlichkeit und Abhängigkeit der Absorptionskoeffizienten mit dem geometrischen Ort zu bedeutenden Effekten führt, die starke Abweichungen von den Ergebnissen mit isotropem Absorptionskoeffizienten bedingen. Die Berücksichtigung solcher Effekte ist also wichtig. Auf der anderen Seite müssen modellmäßige Vereinfachungen sorgfältig diskutiert werden.

Zunächst war im Rahmen dieser Arbeit ein Modell mit konstantem Geschwindigkeitsbetrag der Wasserstoffatome untersucht worden. Die Richtungsverteilung der Atome ging rasch von einer Gleichverteilung in dem inneren Entstehungsgebiet in eine radiale über. In den äußeren Bereichen flogen die H-Atome also mit konstanter radialer Geschwindigkeit. Es galt $\mathcal{K}(\Delta v) \propto \delta(\Delta v - \Delta v_0 \cos \varphi)$ bzw. $\mathcal{Z}(\Delta v, D) = \frac{1}{\sqrt{\pi} D} \frac{1}{\sqrt{1 - \Delta v^2}}$, was dazu führte, daß Photonen einer bestimmten Frequenz nur auf dem Mantel eines zur Sonne bzw. in die entgegengesetzte Richtung geöffneten Kegels absorbiert werden konnten. Die einzelnen Kegel waren optisch vollständig entkoppelt und schatteten sich nicht ab. Abschattung fand nur auf und in der unmittelbaren Umgebung des Radiusvektors zur Sonne statt. Hierdurch wurden die Isophoten in Sonnenrichtung nach außen konkav und die sonnenzu- bzw. sonnenabgewandte Kometenhälfte waren praktisch identisch.

Wegen der gravierenden Auswirkungen der konstanten radialen Geschwindigkeit wurde dieses Modell trotz seiner genaueren Beschreibung des Dichteprofiles fallengelassen.

3.) Vergleich mit der Messung von Code

Bisher sind die Kometen Tago-Sato-Kosaka (1969g), Bennett (1969i) und Encke (1970d) im Lichte der Ly- α Emission beobachtet worden. Bertaux und Blamont registrierten von dem sehr exzentrisch fliegenden Satelliten OGO 5 den Kometen Bennett an rund 10 Tagen in der Zeit vom 1. bis 20. April 1970 sowie Encke im Dezember 1970. Die Auflösung betrug 40 Bogenminuten. Die Empfindlichkeit reichte aus, um die Wasserstoffwolken bis zum Himmelshintergrund von rund 300 R zu verfolgen. Da die Auflösung nicht ausreicht, um die inneren optisch dichten Teile der Wolken innerhalb von 10^6 km im einzelnen zu registrieren, sind diese Messungen, die bereits z.T. veröffentlicht wurden (Bertaux und Blamont 1970), nicht für einen Vergleich mit unseren Rechnungen geeignet. Code und Mitarbeiter erhielten Registrierungen von dem Satelliten OAO 2 der Kometen Tago-Sato-Kosaka und Bennett mit einer Auflösung von einer Bogenminute. Die Empfindlichkeit ist allerdings geringer, sie reicht bis etwa 10 KR. Die Messungen zeigen daher nur die inneren Teile der Wasserstoffwolke.

Da die Radialkomponente der Geschwindigkeit des Kometen Tago-Sato-Kosaka relativ zur Erde im Beobachtungszeitraum durch Null ging, konnte Code ein Emissionslinienprofil durch die selektive Absorption der terrestrischen Wasserstoffatome über dem Satelliten bestimmen. Die kometary Linienbreite entspricht 1600°K . Die sich hieraus ergebende mittlere Geschwindigkeit liegt bei $5,5 \text{ km sec}^{-1}$. Wir vergleichen unsere Rechnung mit einem Isophotendiagramm des Kometen Bennett, das von Code am 16.4.1970 registriert wurde (Abb.2').

Die Entfernung des Kometen zur Sonne betrug $\varrho = 0,81$ AE. Die Entfernung des Kometen zur Erde betrug $\Delta = 1,0$ AE. Die radiale Geschwindigkeit zur Sonne war $v_{\varrho} = 27,0 \text{ km sec}^{-1}$. Eine Bogenminute entspricht $4,35 \cdot 10^3 \text{ km}$.

Außerordentlich wichtig für die Bestimmung der kometairen Parameter ist die genaue Kenntnis des solaren Ly- α Flusses. Für eine detaillierte Interpretation ist die Messung der solaren Linie zur gleichen Zeit wie die Registrierung der Kometenintensität unerlässlich, da die solare Helligkeit Schwankungen unterliegt. Im jetzigen Stadium dürften die Fehler der Absolutkalibrierungen der Kometenintensitäten noch weitaus größer sein (s.u.). Wir nehmen für den Ly- α Fluß in einer A.E. Sonnenentfernung den Wert $\alpha F_{\odot} = 3,2 \cdot 10^{11}$ Photonen $\text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$. Er liegt in dem mittleren Bereich, der von verschiedenen Autoren angegebenen Werte von 3 bis $4,0 \cdot 10^{11}$ Photonen $\text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1}$.⁺

Allerdings wird nicht der Gesamtfluß $\alpha F_{\odot}$ benötigt, sondern der monochromatische. Die Breite der solaren Ly- α Linie beträgt rund 1 Å. Der mittlere Fluß pro Å ist also $3,2 \cdot 10^{11}$ Photonen $\text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ Å}^{-1}$. In der Mitte zeigt die Linie starke Selbstabsorption, sie wird etwa bis auf ihr mittleres Intensitätsniveau herabgedrückt, so daß wir für diesen Teil der Linie den mittleren monochromatischen Fluß annehmen können. Durch die von der Bewegung des Kometen relativ zur Sonne herrührende Dopplerverschiebung der gesamten

+ Vergleiche hierzu und zum Linienprofil Hinteregger et al. (1965), Hall und Hinteregger (1970), Barth (1969), Bruner und Rense (1969), Bruner und Parker (1969), Detwiler, Garrett, Purcell und Tousey (1961), Tousey (1963).

kometaren Absorptionslinie findet die Absorption nicht im Linienzentrum der solaren Ly- α Linie statt, sondern sie wird um rund $1/10 \text{ \AA}$ in die innere Flügelflanke der Linie gerückt. Daher wird der monochromatische Fluß, der von dem Kometen absorbiert wird, keineswegs konstant sein, was sich in der Emissionslinie der Wasserstoffwolke bemerkbar machen muß.

Wir sehen, daß für eine genaue Analyse der Emission nicht nur der gesamte solare Ly- α Fluß, sondern auch seine Intensitätsverteilung, d.h. das solare Ly- α Linienprofil, bekannt sein muß.

Am Ort des Kometen Bennett am 16.4.1970 nehmen wir $\pi F_{\odot\lambda} = 4,9 \cdot 10^{11}$ Photonen $\text{cm}^{-2} \text{ sec}^{-1} \text{ \AA}^{-1}$. Für die Anregungswahrscheinlichkeit eines H-Atoms gilt

$$A = \frac{\pi e^2}{m c} \cdot f \pi F_{\odot\lambda} \frac{\lambda^2}{c}$$

$$= 0,544 \cdot 10^{-14} \pi F_{\odot\lambda} = 2,66 \cdot 10^{-3} \text{ sec}^{-1}$$

Die hieraus resultierende Beschleunigung der H-Atome durch die Ly- α Quanten ergibt sich zu

$$b = A \cdot \frac{h \nu_0}{m_H c}$$

$$= A \cdot 3,26 \cdot 10^2 = 0,87 \text{ cm sec}^{-2}$$

m_H = Masse des H-Atoms
 h = Wirkungsquantum

Der Wert liegt etwas unterhalb der gravitativen Beschleunigung durch die Sonne von $0,91 \text{ cm sec}^{-2}$.

Der Phasenwinkel Sonne-Komet-Erde war 66° ; der daraus resultierende Projektionsfaktor ist 1,09. Da sich die Isophoten für diesen

Phasenwinkel von denen für $\pi/2$ kaum unterscheiden, wurde die Abweichung bei dem Vergleich mit der Messung nicht berücksichtigt.

Bei dem jetzigen Stand der Modellrechnungen und den veröffentlichten Isophoten kann eine Übereinstimmung in den Einzelheiten der Isophotenkonturen nicht erwartet werden.

Wir beschreiten daher, um eine quantitative Aussage machen zu können, einen vereinfachenden Weg. Die radialen Abstände einer Isophote vom Zentrum in verschiedenen Richtungen werden gemittelt. So wird ein mittlerer Abstand zum Zentrum definiert. Für das gerechnete Modell wurden die Isophoten direkt über Kreisringe gemittelt.

Um das Modell an die Beobachtung von Code anzuschließen, tragen wir die Isophotenstärke in Abhängigkeit ihres radialen Abstandes jeweils in logarithmischem Maßstab auf. Das gleiche wird mit der mit 4π multiplizierten gerechneten Intensität der Kreisringe (gemessen in KR) gemacht (Abb.8).

Ähnlich wie bei der Bestimmung der Elementhäufigkeit aus den Wachstumskurven in der Theorie der Sternatmosphären kann man jetzt die unbekannten Parameter Δv_D und $\frac{Q_W}{v_H}$ der Modellrechnung bestimmen.

Die Differenz der Ordinaten $\Delta \log I$ liefert bei bekanntem solaren Fluß die Dopplerbreite der Emissionslinie, denn es ist

$$\Delta \log I = \log (F_{0\lambda} \Delta v_D)$$

Nach der Verschiebung in Ordinatenrichtung werden die Kurven in Abszissenrichtung übereinandergespaßt. Für die Differenz $\Delta \log R$ gilt

$$\Delta \log R = \log D_0 = \log \left(\frac{\pi e^2}{m c} \frac{1}{\Delta v_D} \frac{Q_w}{v_H} \sqrt{\pi} \right) \\ = 6,05$$

also $D_0 = 1,1 \cdot 10^6$ km.

Für Δv_D finden wir

$$\Delta v_D = 0,065 \cdot 10^{12} \text{ sec}^{-1}$$

Dies entspricht etwa 5% der Dopplerfrequenz der solaren Ly- α Linie.

Und daraus findet man v_0

$$v_0 = \frac{\Delta v_D}{v_0} c \\ = 7,8 \text{ km sec}^{-1}$$

Aus der Abszissendifferenz ergibt sich

$$\frac{Q_w}{v_H} = 3,72 \cdot 10^{23} \text{ cm}^{-1} \text{ sterad}^{-1}$$

Wenn wir die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} v_0 = 0,89 \cdot v_0$ der radialen Verteilung mit der Ausströmungsgeschwindigkeit der Wasserstoffatome identifizieren $v_H = \bar{v}$, so erhalten wir für die Produktionsrate

$$Q = 4\pi \cdot \frac{Q_w}{v_H} \cdot \bar{v} \\ = 3,23 \cdot 10^{30} \text{ H-Atome sec}^{-1} \\ v_H = 7,0 \text{ km sec}^{-1}$$

Diese Werte stimmen innerhalb der Beobachtungsgenauigkeit (s.u.) und den modellbedingten Vernachlässigungen überein mit Ergebnissen von Rechnungen, die sich auf den optisch dünnen Teil der Wasserstoffatmosphäre stützen (Keller 1971). Dort ergab sich für eine Registrierung des gleichen Kometen am 15.4.1970 von Bertaux und Blamont (private Mitteilung)

$$Q = 8,8 \cdot 10^{29} \text{ H-Atome sec}^{-1} \quad \text{und} \quad v_H = 8 \text{ km sec}^{-1}$$

Die Produktionsrate für die Wasserstoffatome liegt in dem unteren Bereich der von Biermann (1968) postulierten Werte. Wir können diesen Wert als eine neue unabhängige Bestätigung der hohen Produktionsraten betrachten, wie sie von mehreren Autoren auf verschiedene Weise gefunden wurden (Huebner 1965, Malaise 1970, Biermann und Treffitz 1964, Finson und Probst 1968, vergl. Kap.I), denn der Komet Bennett war nur auf Grund seiner sehr starken Staubproduktion im sichtbaren Licht so hell wie beobachtet.

Die radiale Abhängigkeit der Intensität bei den Messungen von Code nimmt in den äußeren Gebieten ($R \sim 10^6 \text{ km}$) weniger rasch ab als weiter innen ($R \sim 4 \cdot 10^5$) (Abb.8). Falls sich dies in weiteren Messungen bestätigen sollte, könnte dieser Effekt nur durch eine starke Produktion von H-Atomen in den äußeren Gebieten erklärt werden, was nach allen bisherigen Abschätzungen über die Lebensdauer und Geschwindigkeit der Muttermoleküle äußerst unwahrscheinlich ist. Die Messungen von Bertaux und Blamont zeigen solche Effekte nicht.

Vermutlich sind diese Abweichungen von dem Übergang zu den optisch dünnen Teilen der Wasserstoffwolke, wo die Intensität mit $1/d$ abnehmen sollte, zumindest zum Teil auf Messfehler zurückzuführen. Wegen des Fehlens der optisch dünnen Teile bei den Codeschen Messungen ist die Anpassung der gerechneten Kurve schwierig. Verhältnismäßig kleine Änderungen im gemessenen Intensitätsverlauf können zu größeren Änderungen der berechneten Quellstärke führen. Wir haben in das Diagramm 8 auch den radialen Abfall der Helligkeit für die Messungen von Bertaux und Blamont des Kometen Bennett am 15.4.70 eingetragen. Zu den Werten von Code zeigt sich ein deutlicher Intensitätssprung, der z.T. auf die verschiedene Auflösung der beiden Messungen und z.T. auf unterschiedliche Absolutkalibrierung zurückzuführen sein dürfte. Eine reale Intensitätsschwankung solchen Ausmaßes ($\sim$ Faktor 2) innerhalb eines Tages kommt wegen der langen Lebensdauer der Wasserstoffatome von rund 10^6 sec kaum in Frage, da zu dem obigen Datum keine besondere Sonnenaktivität festgestellt wurde. Eine Verlängerung der Codeschen Kurve parallel zu derjenigen von Bertaux und Blamont ergibt eine Differenz in der Abszisse, die etwa von gleicher Größe wie der Unterschied aus den Rechnungen ist. Die Differenz in den Ergebnissen erklärt sich also im wesentlichen aus der Diskrepanz in den Meßergebnissen. Das Ergebnis für Q aus unseren Rechnungen liegt aus diesen und den oben erwähnten Gründen vermutlich an der oberen Grenze.

Ein weiterer Punkt, weshalb der soeben bestimmte Wert der Quellstärke noch mit Fehlern behaftet sein kann, ist die Tatsache, daß im Zentralgebiet der Wolke die Annahme nur auswärts fliegender Teilchen nicht erfüllt ist. Wir wollen im folgenden diskutieren, ob trotzdem die Ausbuchtung der gerechneten Isophoten in der Ebene $y = 0$ bei $\tau(0) > 1$ beobachtbar sein kann. Dazu muß der Bereich abgeschätzt werden, in dem nur auswärts fliegende Teilchen existieren.

Wir können die gesamte Gasproduktion Q_M in der gleichen Größe wie die H-Atomproduktion (Biermann 1968) zu rund $2 \cdot 10^{30}$ Moleküle sec^{-1} annehmen. Dann ist die mittlere freie Weglänge der Wasserstoffatome (vergl. II.2) bei rund $3 \cdot 10^4$ km ihrem Kernabstand R vergleichbar.

Nach 10^5 sec werden die H-Atome durch den solaren Lichtdruck eine zusätzliche Geschwindigkeitskomponente in Richtung von der Sonne weg von rund 1/10 ihrer ursprünglichen Ausströmgeschwindigkeit haben. Sie sind dann ungefähr $8 \cdot 10^5$ km vom Kern entfernt.

Wir dürfen also annehmen, daß die Wasserstoffatome in dem Gebiet von 10^5 km bis $8 \cdot 10^5$ km Kernabstand ungestört fliegen. Nur die in diesem Gebiet neu entstandenen H-Atome zeigen zunächst Abweichungen von der radialen Richtung.

Da die Lebensdauer der Muttermoleküle in der Entfernung von 0,81 AE höchstens $2,4 \cdot 10^5$ sec sein dürfte (Biermann und Treffitz 1964, Del Duca und Potter 1964), liegt das Produktionsgebiet der Wasserstoffatome innerhalb von 2 bis $3 \cdot 10^5$ km Kernabstand, denn

die Molekülgeschwindigkeit ist kleiner 1 km/sec (Malaise 1970). Für das Wassermolekül H_2O - wahrscheinlich der wichtigste Wasserstofflieferant - ist die Lebensdauer in 1 AE Sonnenentfernung 10^5 sec, in unserem Fall also nur $6,5 \cdot 10^4$ sec. In der sich an dieses Dissoziationsgebiet anschließenden Kugelschale sollte die Geschwindigkeit vorwiegend radial sein.

Alle diese Abschätzungen sind sehr unsicher, da zum Teil aus Labormessungen auf die kometaryen Verhältnisse (Lebensdauer der Muttermoleküle) geschlossen wird und die Muttermoleküle selbst nicht sicher bekannt sind. Wegen der Abkühlung der H-Atome an den schwereren Teilchen kann die Ausströmgeschwindigkeit von der aus der Emissionslinie bestimmten mikroskopischen abweichen, so daß sich die Auswirkungen des Lichtdrucks schon bei kleinen Entfernungen bemerkbar machen (s.u.).

Das eventuelle Auftreten der Merkmale der radialen Geschwindigkeitsverteilung kann auf der inneren Seite die äußere Grenze des Produktionsgebietes der H-Atome abgrenzen und außen wegen des bekannten Einflusses des Lichtdruckes eine Aussage über die Ausströmgeschwindigkeit der H-Atome gestatten.

Der Verlauf der von Code gemessenen Isophoten in dem vorliegenden Bild (Abb.2) schließt die der radialen Geschwindigkeitsverteilung entsprechenden Ausbuchtungen in der Ebene senkrecht zur Sonnenrichtung nicht aus. Zum Vergleich wird eine genauere Auswertung der registrierten Daten bis zu der angegebenen Auflösung von 1 Bogenminute notwendig sein, sie entspräche rund $4,35 \cdot 10^4$ km.

Die Rasterlänge der Abbildung 9 beträgt nach der Eichung von D_0 rund $7 \cdot 10^4$ km, so daß ein direkter Vergleich möglich ist.

Ein Hinweis auf die radiale Geschwindigkeitsverteilung könnte die Feststellung Codes sein, daß bei dem Kometen Tago-Sato-Kosaka auch in den optisch dichten Gebieten praktisch keine Verschiebung der Emissionslinie durch den Dopplereffekt festzustellen war (Code 1970).

Die zentrale Intensität von .42 KR ist etwas weniger als 1/10 des solaren Ly- α Flusses am Ort des Kometen. Die Absorptionslinie muß also rund 1/10 der solaren Linie betragen; dies gilt für die Linienbreiten nur solange gleiche Profile vorausgesetzt sind. Beim Gaußprofil, das auch für die solare Linie angenommen werden kann, ist die Halbwertsbreite $\Delta v_{1/2} = 0,8 \Delta v_D$. Bei dem bei der Rechnung benutzten Profil ist $\Delta v_{1/2}$ bedeutend kleiner als Δv_D , nämlich $\Delta v_{1/2} = 0,5 \Delta v_D$. Es wird hier also mehr im inneren Teil der Linie absorbiert, so daß der gefundene Wert von Δv_D nicht im Widerspruch steht.

Die Geschwindigkeit der Wasserstoffatome unmittelbar nach ihrer Entstehung dürfte auf Grund der hohen Überschußenergien von mehr als 1 eV nach der Dissoziation bei 12 km/sec und mehr liegen (Keller 1971). In den innersten Teilen der Wasserstoffwolke verlieren die Atome ihre hohe Energie durch mehrfache Stöße mit den langsameren Molekülen. So wird die Emissionslinie durch Streuung an einer Mischung von schnellen und langsamen Wasserstoffatomen entstehen. Die Verteilungsfunktion wird sich selbst im Zentralteil kaum durch eine Maxwellverteilung mit dem entsprechenden Dopplerprofil der Absorptionslinie exakt darstellen lassen.

Ein weiterer Punkt bei dem Vergleich der Rechnung mit den Messungen ist das Fehlen eines Abschattungsgebietes auf der sonnenabgewandten Seite bei allen Messungen. Nicht nur diese Rechnungen sondern auch solche für Einfachstreuung mit einem kastenprofilartigen Linienabsorptionskoeffizienten zeigen deutliche Abschattungseffekte (Keller 1971). In den äußeren Teilen ist das Fehlen der Abschattung verständlich, da hier die durch den Lichtdruck beschleunigten Atome größere Geschwindigkeitskomponenten haben als die im inneren fliegenden und daher nur z.T. abgeschattet werden können. In den inneren Teilen ist die Abschattung wahrscheinlich wegen mangelhafter Auflösung noch nicht entdeckt worden.

Um alle oben beschriebenen wirksamen Effekte bei der Streuung der Ly- α Linie zu erfassen und daraus eine genaue Dichte- und Geschwindigkeitsverteilung der Wasserstoffatome zu finden, ist es notwendig, die Isophoten noch besser aufzulösen und die Linienprofile an verschiedenen Stellen zu registrieren. Nur so können an Hand von theoretischen Überlegungen genauere Ergebnisse erzielt werden. Falls diese bekannt sind, werden sich daraus eventuell wiederum Rückschlüsse auf die Dichte und Art der Muttermoleküle sowie auf die chemischen Reaktionen ziehen lassen.

4.) Die Gesamtausdehnung der Wasserstoffwolke

In unserem Modell trat die Gesamtausdehnung der Wasserstoffwolke R_g als Parameter auf. Wir nahmen dafür den Wert $R_g = 40$. Nach Anschluß an die Beobachtungen können wir R_g genauer abschätzen.

Die Lebensdauer der Wasserstoffatome der Wolke wird durch Umladungsionisation mit dem Sonnenwind und durch Photoionisation begrenzt. Sie kann zu $t_{II} = 10^6$ sec angenommen werden (Biermann 1968, Keller 1971). Innerhalb der Zeit erreichen die Atome rund $8 \cdot 10^6$ km Kernabstand. In dieser Entfernung muß die Dichte der H-Atome exponentiell abfallen. Mit $R_g = 40 \cdot D_o = 4,4 \cdot 10^7$ km wurde die Wasserstoffwolke in dem Modell in ihrer Gesamtausdehnung etwas überschätzt. R_g mußte vor der Absoluteichung an den Codeschen Messungen festgelegt werden. Der Fehler für die zentrurnahen Gebiete unserer Rechnung kann vernachlässigt werden.

5.) Anwendung der Rechnung für Metaldampfwolken

Ein anderes Anwendungsgebiet für die Mehrfachstreuung einer radial nach außen strömenden Gaswolke könnten die geplanten künstlichen Metaldampfwolken im extraterrestrischen Raum sein. Nach der ersten explosiven Phase bei der Erzeugung dieser Wolken, wo wir ein anderes Geschwindigkeitsgesetz erwarten (Drapatz 1970), müßte sich, wenn keine Thermalisierung durch Stöße mit umgebenden Gasen möglich ist, eine oben beschriebene radiale Ausströmung einstellen.

VI. Zusammenfassung

Mit Hilfe der Monte-Carlo-Rechnung wird die Helligkeitsverteilung einer einseitig beleuchteten im Licht einer Resonanzlinie fluorisierenden Gaswolke unter Berücksichtigung der Mehrfachstreuung berechnet. Es wird eine Punktquelle angenommen mit rein radial nach außen fliegenden Atomen, die die Geschwindigkeitsverteilung $f(v)dv = \frac{2}{v_0^2} e^{-\left(\frac{v}{v_0}\right)^2} dv$ haben. Dieses Modell wird auf die kometaren Wasserstoffwolken im Licht der Lyman α Linie angewandt, wo es besonders in dem Gebiet außerhalb der Dissoziationszone der Muttermoleküle bis zu den Entfernungen vom Kern, wo die Beschleunigung durch den solaren Lichtdruck eine merkliche Änderung der Ausströmgeschwindigkeit hervorgerufen hat, gut mit den tatsächlichen Gegebenheiten übereinstimmen sollte. Die Auswirkungen des anisotropen Absorptionskoeffizienten werden an Hand der Isophoten und Linienprofile in verschiedenen Gebieten der Wolke diskutiert.

Ein Vergleich bzw. eine Anpassung an die Messungen von Code und Mitarbeiter des Kometen Bennett (1969) gestattet es, eine Produktionsrate für die Wasserstoffatome von $Q = 3,2 \cdot 10^{30}$ H-Atome sec^{-1} mit einer mittleren Ausströmgeschwindigkeit $\bar{v} = 7,0 \text{ km sec}^{-1}$ aus den optisch dichten Teilen der kometaren Wasserstoffwolke zu bestimmen. Diese Werte stehen mit denjenigen aus Rechnungen (Keller 1971) für die optisch dünnen Teile des Kometen nach Messungen von Bertaux und Blamont innerhalb der Meßgenauigkeit in Einklang. Im Gültigkeitsbereich des Modells sollten in der Ebene senkrecht zur Sonnenrichtung durch den Kometenkern eine Auswärtsbiegung in den Isophoten zu beobachten sein. Die Emissionslinie sollte auch bei größerer optischer Tiefe nicht frequenzverschoben sein.

omet Bennett (19691) : Lyman- α Isophoten gemessen von
 ertaux und Blamont. Aufnahme des sichtbaren Kometenbildes
 alas (Budapest). 1° entspricht 1,89 Mill km.

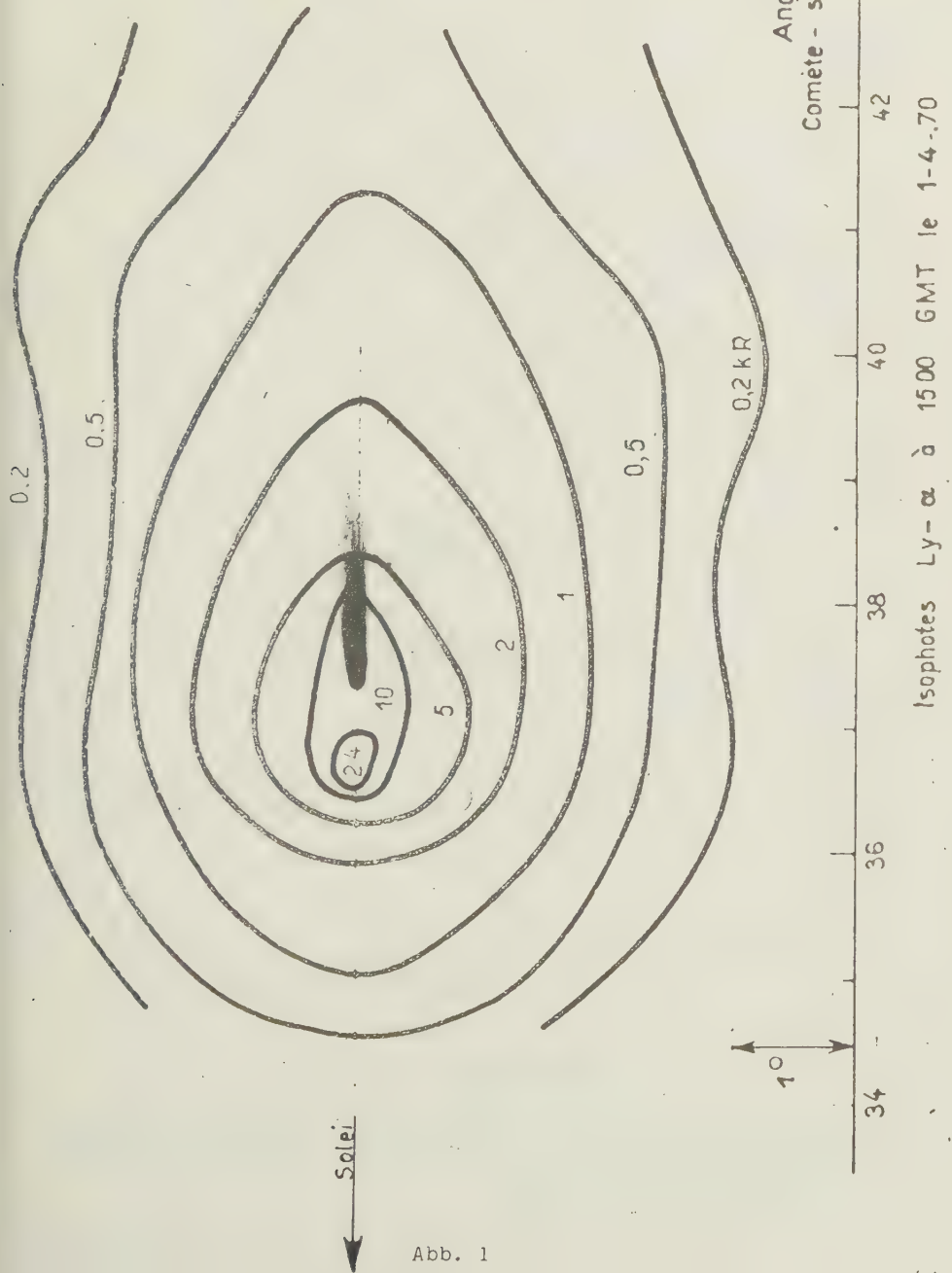
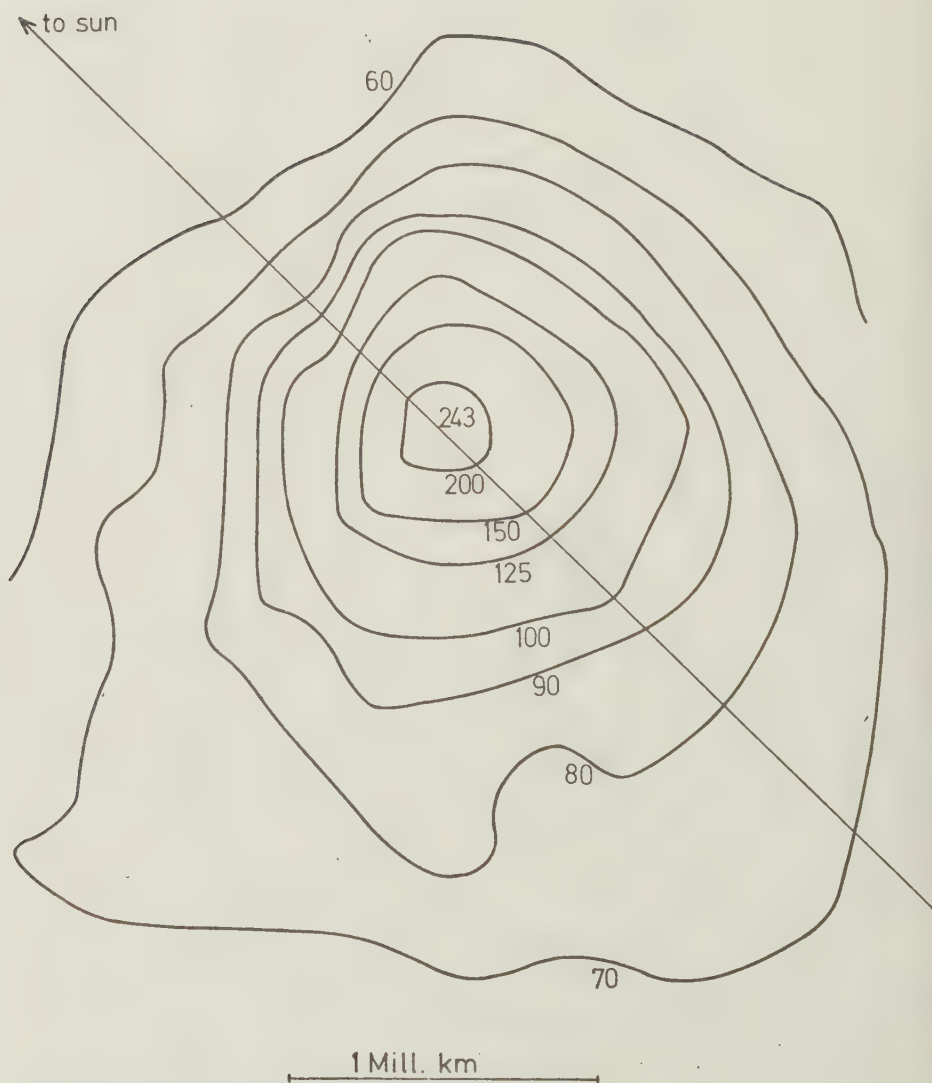


Abb. 1

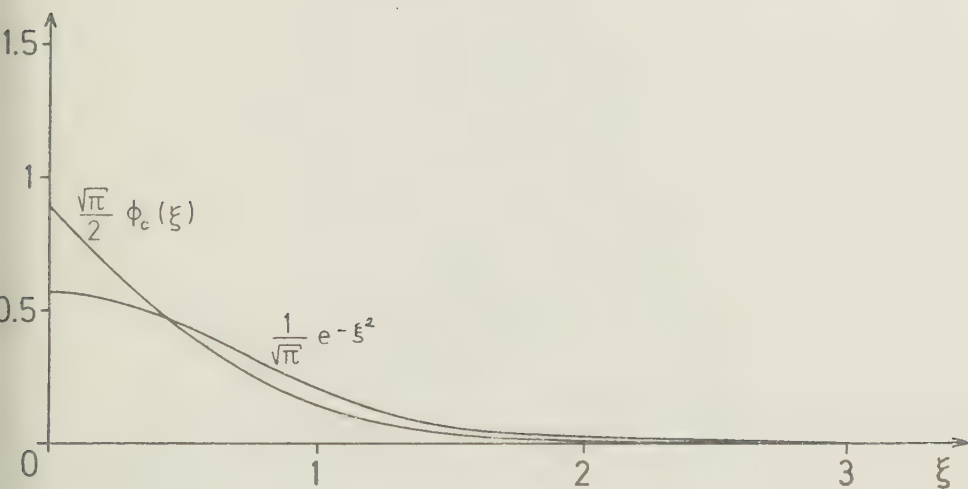
Bennett
16. April 1970

- 61 -

Code and Lillie

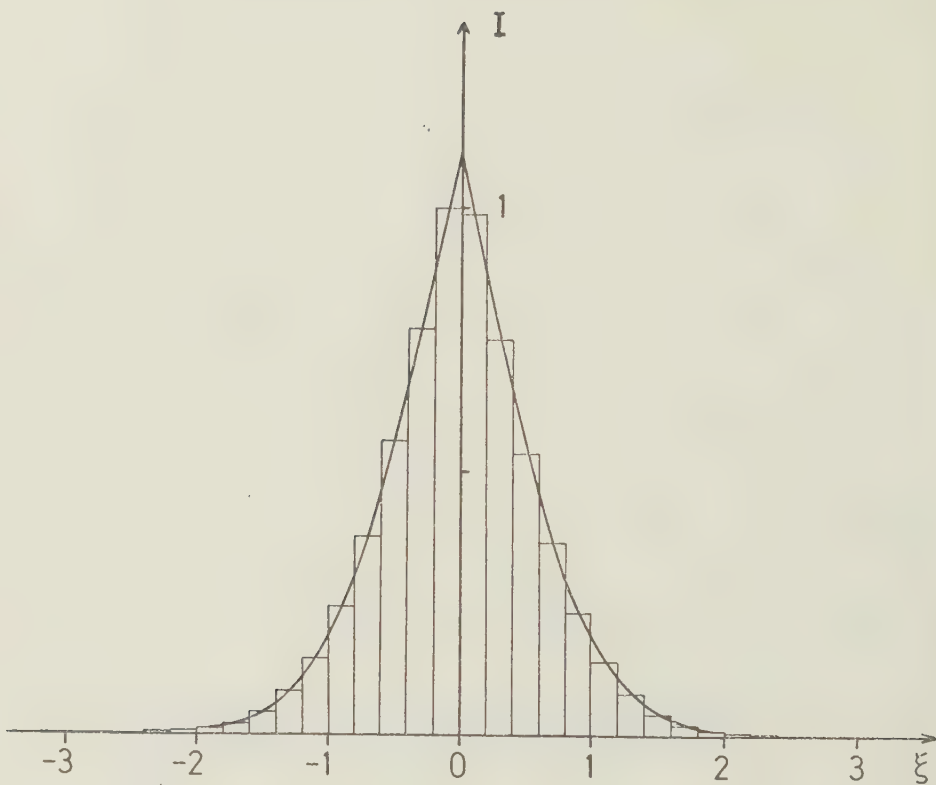


Komet Bennett (19691) am 16.4.1970. Lyman- α Isophoten gemessen von Code und Lillie. Eichung der Isophoten: 430 entspricht 74 KR. Zentralintensität also 42 KR.



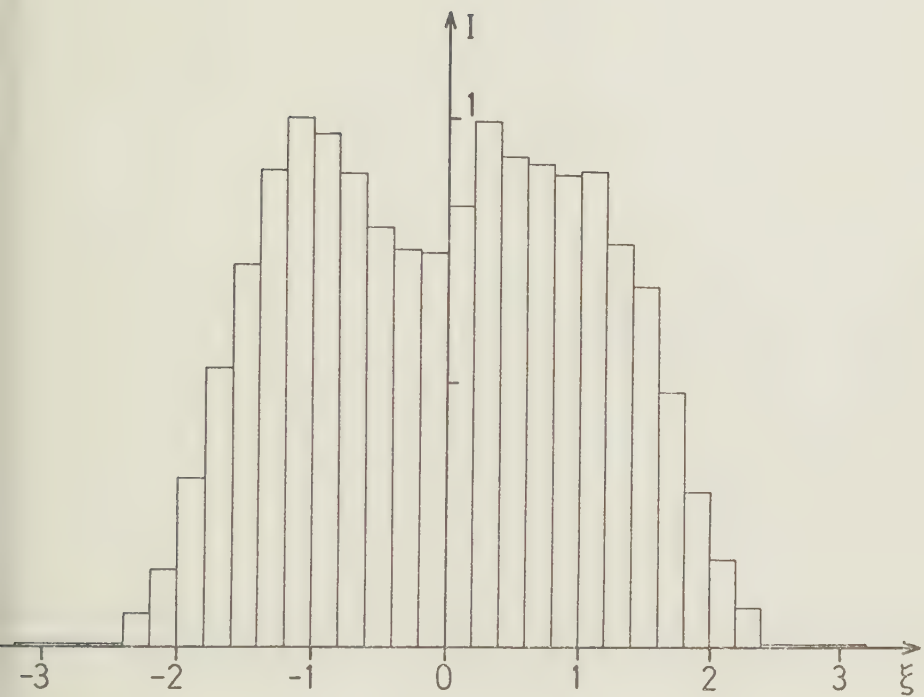
Vergleich des mittleren Modellprofils $\frac{\sqrt{\pi}}{2} \phi_c(\xi)$ mit dem Dopplerprofil $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2}$ einer radialen Maxwellverteilung.

Abb. 3



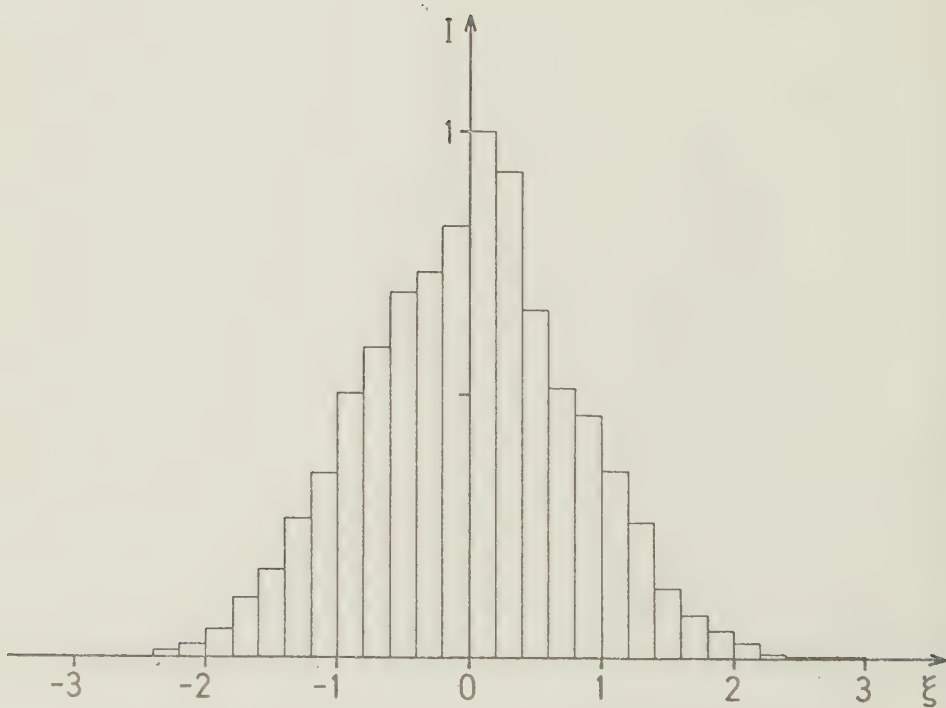
Emissionslinie des gesamten Bereiches mit $r < R_{\max}$.

Abb. 4



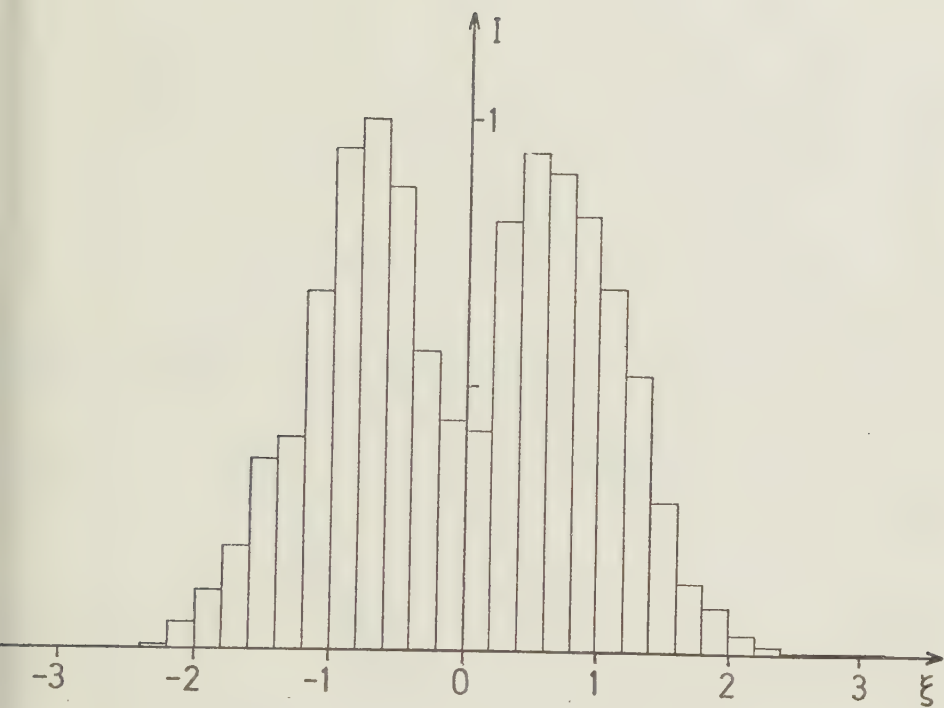
Linienprofil aus dem zentralen Gebiet mit $D < 0,1$ ($\tau_t(\xi = 0) > 10$)

Abb. 5



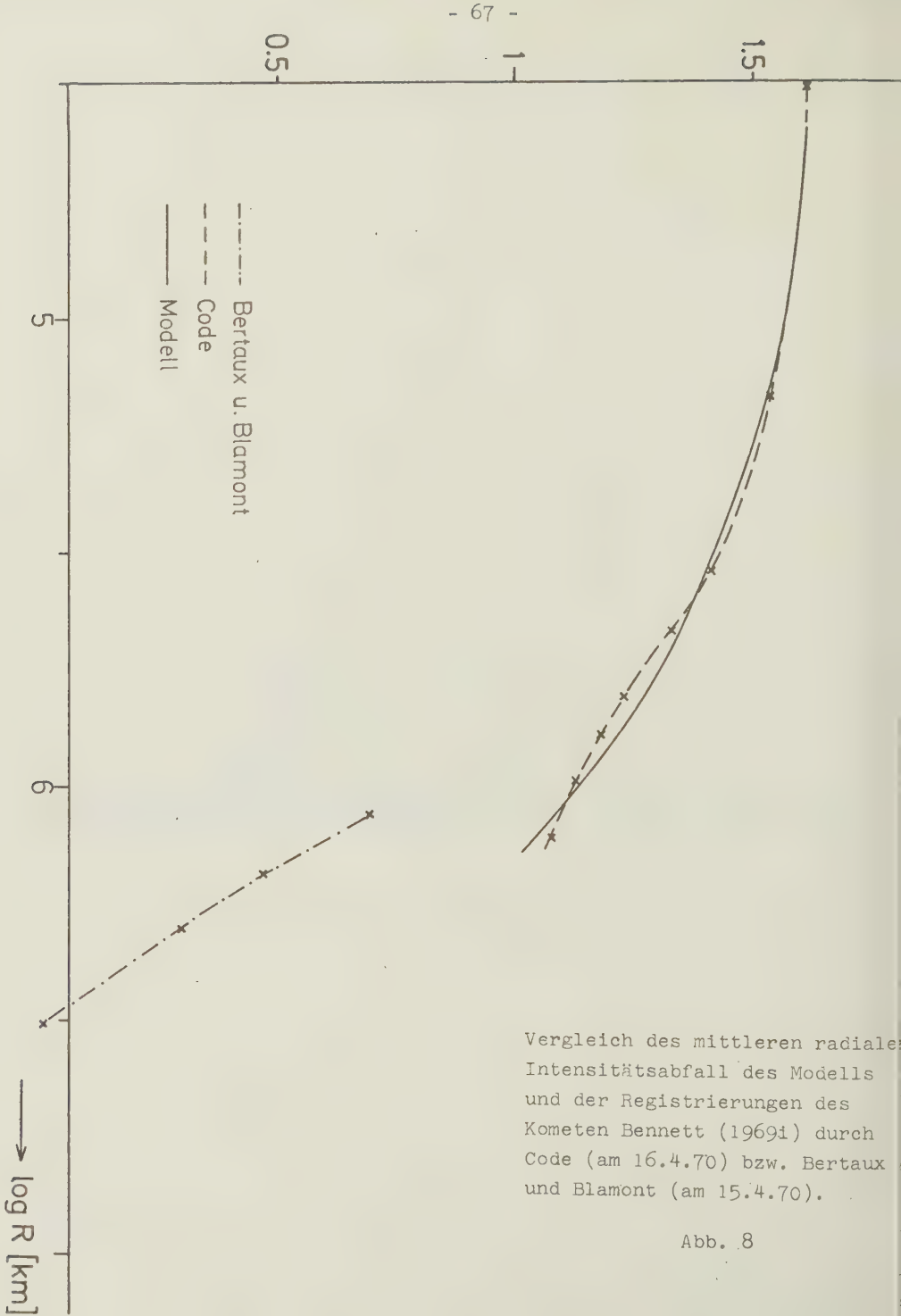
Linienprofil aus dem Gebiet $y = -0,3$, $z = 0$

Abb. 6

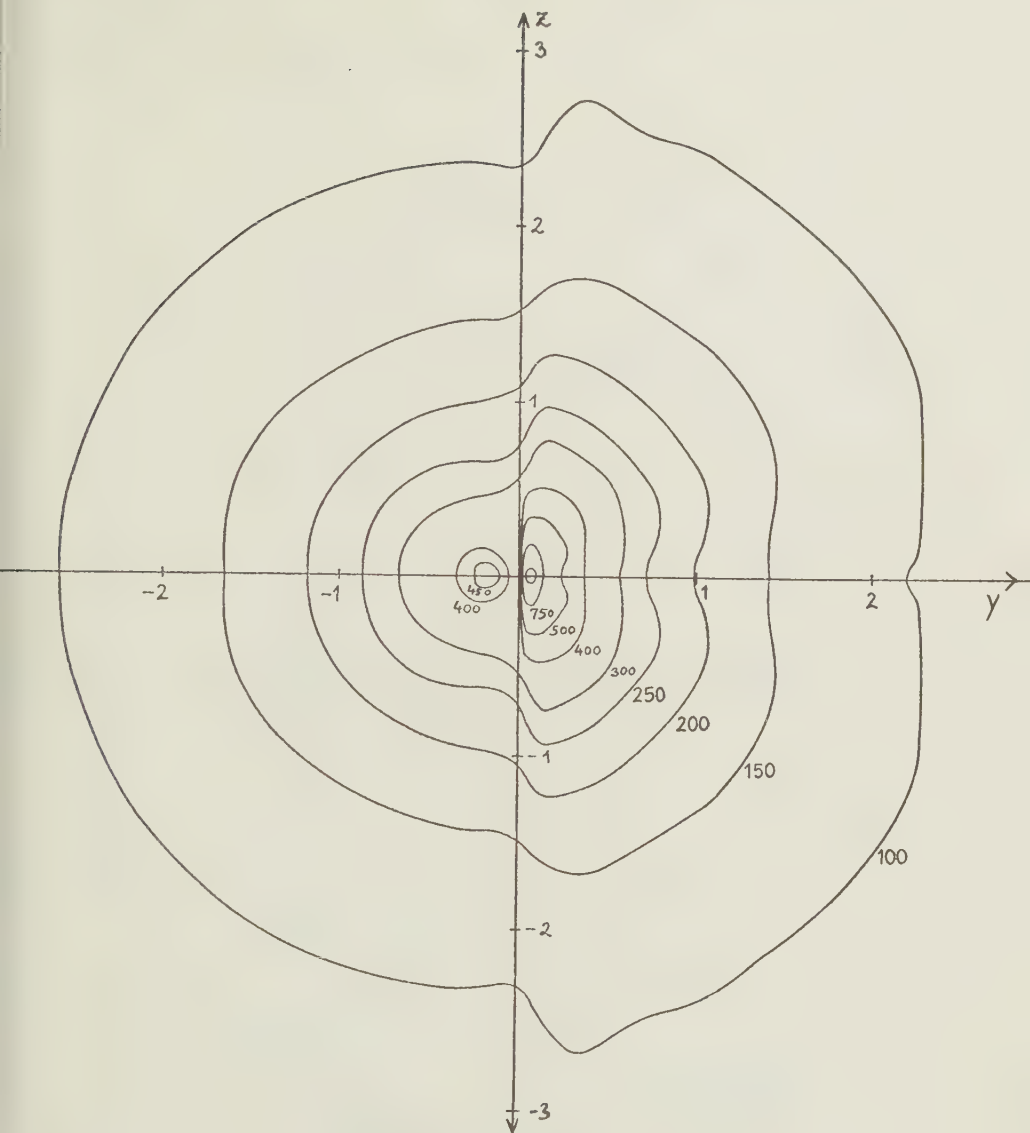


Linienprofil aus dem Gebiet $y = 0,3, z = 0$

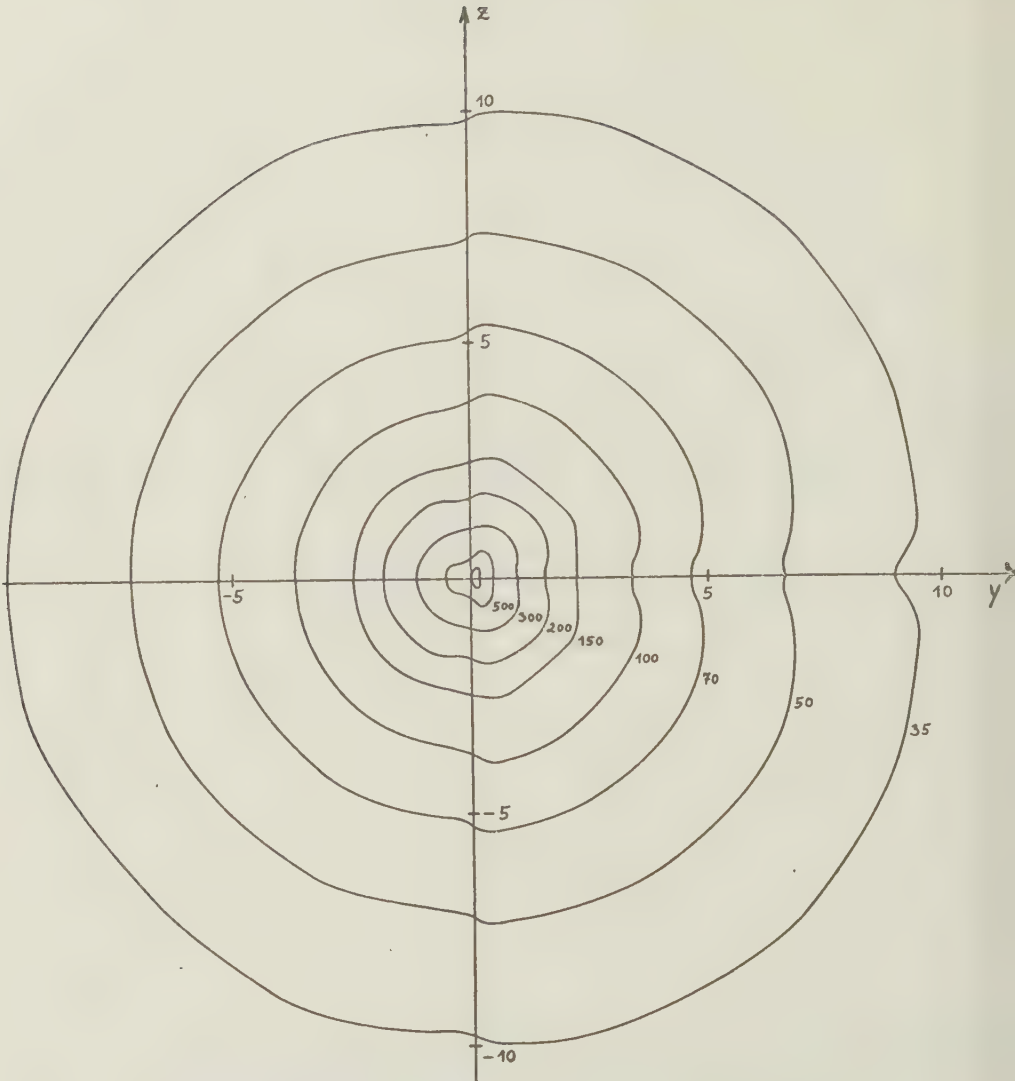
Abb. 7



Vergleich des mittleren radialen Intensitätsabfall des Modells und der Registrierungen des Kometen Bennett (19691) durch Code (am 16.4.70) bzw. Bertaux und Blamont (am 15.4.70).

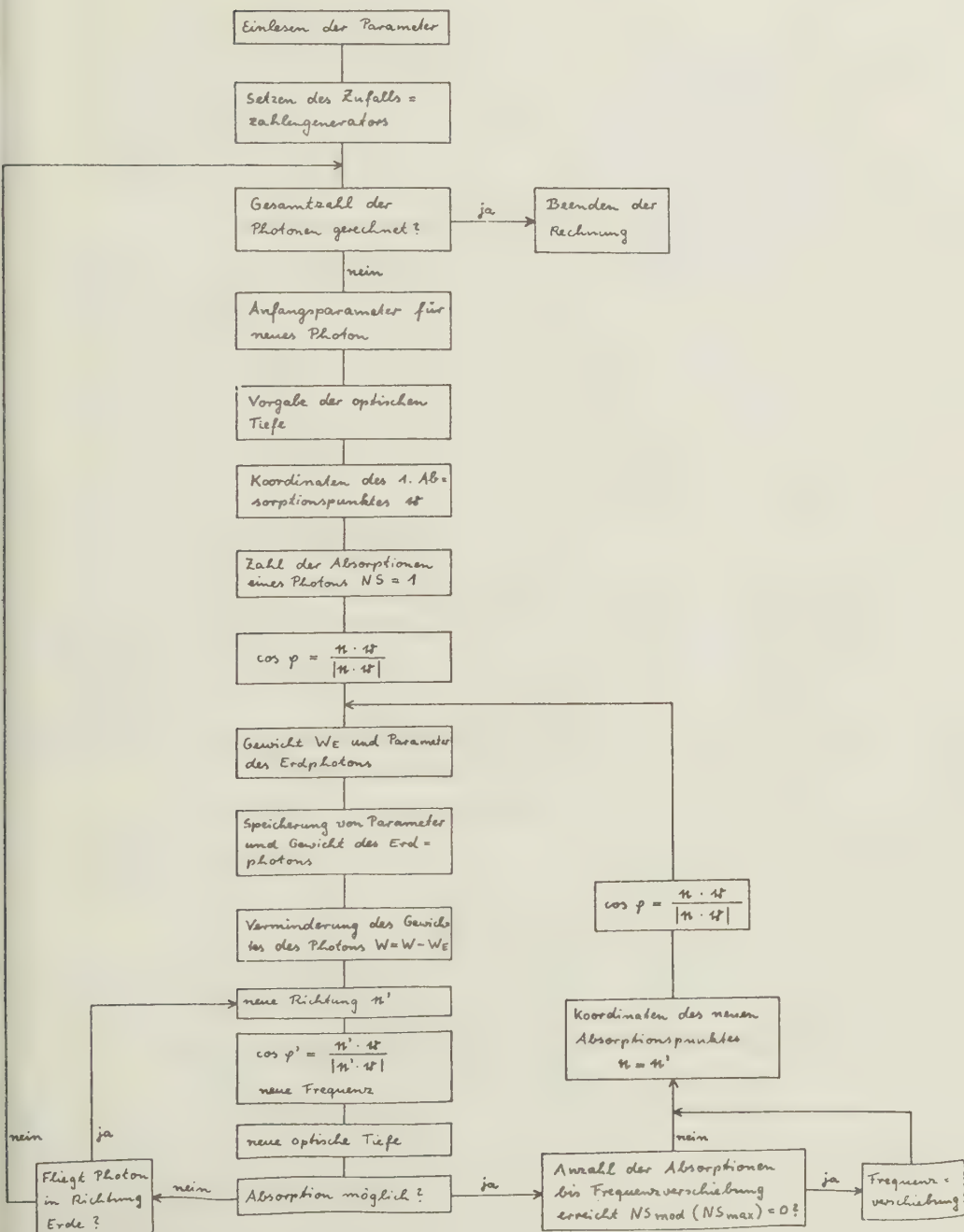


Isophoten der Modellrechnung. Sonne auf der linken Seite.
 Ausschnitt bis $D = 3$. Zentralintensität zu 1000 normiert.
 Auflösung ~ 0.06 .



Isophoten der Modellrechnung. Sonne auf der linken Seite.
Ausschnitt bis $D = 11$. Zentralintensität zu 1000 normiert.
Auflösung ~ 0.4 .

Flußdiagramm



Literatur

- Barth, C.A.. Applied Optics 8, 1295 (1969)
- Bertaux, J.-L. et J. Blamont C.R. Acad. Sci. 270, 1581 (1970)
- Biermann, L. und E. Treffitz Z. f. Astrophys. 59, 1 (1964)
- Biermann, L. Jila Report 93 (1968)
- Biermann, L. Nature 230, 156 (1971)
- Bruner, E. jr. and R.W. Parker J. geophys. Res. 74, 107 (1969)
- Bruner, E. jr. and W.A. Rense Ap. J. 157, 417 (1969)
- Code, A.D. Bericht IAU Hauptversammlung, Brighton (1970)
- Detwiler, C.R., D.L. Garrett, J.D. Purcell and R. Tousey Ann. Geophysique 17, 263 (1961)
- Drapatz, S. Bericht MPI-PAE/Extraterr. 41 (1970)
- Finson, M.L. and R.F. Probststein Ap. J. 154, 327 (1968);
ebd. 154, 353 (1968)
- Gorenflo, R. und Maria G. Pacco Bericht IPP 6/47 (Jan. 1966)
- Hall, L.A. and H.E. Hinteregger J. Geophys. Res. 75, 6959 (1970)
- Hammersley, J.M. and D.C. Handscomb Monte Carlo Methods. Methuen and Co., London (1964)
- Hastings, C. jr. Approximations for Digital Computers. Princeton University Press, Princeton (1955)
- Hinteregger, H.E. et al. Space Research V, 1175 (1965)
- House, L.L. and L.W. Avery J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 9, 1579 (1969)
- Huebner, W.F. Z. f. Astrophys. 63, 22 (1965)
- Huebner, W.F. und A. Weigert Z. f. Astrophys. 64, 185 (1966)
- Hummer, D.G. M. N. 125, 21 (1962)
- Jansson, B. Random Number Generators. Stockholm. (1966)

- Keller, H.U. Mitt. Astr. Ges. 30, 143 (1971)
- MacLaren, M.D. and G. Marsaglia J. ACM 12, 83 (1965)
- Malaise, D.J. Astron. and Astrophys. 5, 209 (1970)
- Neumann, J. v. Collected Works. Vol. V, Pergamon Press, New York (1963)
- Oxenius, J. J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer 5, 771 (1965)
- Potter, A.E. and Betty Del Duca Icarus 3, 103 (1964)
- Remy-Battiau, L. Ann. Astrophys. 25, 171 (1962)
- Roemer, Elisabeth Nature et origine des comètes (1966). Liège Symposium 1965, Université de Liège
- Schneider, Yu.A. Method of Statistical Testing. Elsevier Publishing Company, London (1964)
- Swings, P. Ann. Astrophys. 25, 165 (1962)
- Toënnies, J.P. private Mitteilung (1970)
- Tousey, R. Space Science Reviews 2, 3 (1963)
- Unsöld, A. Physik der Sternatmosphären. 2. Aufl., Springer, Berlin (1955)
- Whipple, F. Ap. J. 111, 375 (1950):
 ebd. 113, 464 (1951);
 ebd. 121, 750 (1955)

Danksagung

Herrn Prof. Dr. L. Biermann danke ich für die Stellung des
Themas und dafür, daß ich diese Arbeit als Stipendiat am
Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik ausführen
konnte, sowie für sein stets förderndes Interesse. Den
Herren Dr. H.U. Schmidt und Dr. F. Meyer bin ich für viele
Anregungen und Diskussionen zu Dank verpflichtet.

Lebenslauf

Am 25.1.1941 wurde ich als Sohn des Diplomingenieurs Emil Keller und seiner Frau Elisabeth geb. Fuchs in Prag (ČSSR) geboren. 1945 wurden meine Eltern, meine Schwester und ich nach Hamburg vertrieben. Dort besuchte ich von 1947 bis 1952 die Volksschule und anschließend das Gymnasium Hansa-Schule, wo ich im Februar 1960 das Abitur machte. Im Sommersemester 1960 begann ich das Studium der Physik an der Universität Hamburg. 1963 wechselte ich nach dem Vordiplom zur Universität München. Hier legte ich 1967 die Diplomprüfung in Physik ab. Das Thema meiner Diplomarbeit bei Herrn Prof. Dr. P. Wellman an der Universitätssternwarte war die Grobanalyse eines Sterns. Seit dem 1. September 1967 arbeitete ich als Stipendiat am Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik bei Herrn Prof. Dr. L. Biermann an meiner Doktorarbeit.

